Tarea Examen III

Gabriel Cachoa Ocampo

Abril 5, 2016

Este documento corresponde a la tercer tarea examen del curso de Teoría de Conjuntos I, se entrega el 12 de Abril en el salón y en los primeros 10 minutos de la hora de clase (106 del Yellizcali de 12:00 a 12:10). La entrega de la tarea es individual o en parejas, en ese caso ambos recibirán la misma calificación. SE CALIFICA SOBRE 10 PUNTOS. No hay tolerancia al plagio.

1. **Órdenes.** Usando la notación y definiciones del libro del Dr. José Alfredo Amor Montaño *Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias*, probar:
   (a) Un conjunto tiene inducción fuerte si y sólo si es bien fundado. (COIF$\Leftrightarrow$ COBF) (1pto.)
   (b) En un conjunto linealmente ordenado, todo minimal es un mínimo. Exhiba un ejemplo de un orden parcial en el que esto no ocurra.(1pto.)
   (c) Un conjunto con inducción fuerte, linealmente ordenado es un conjunto bien ordenado. (Sugerencia: Use los incisos anteriores.) (1pto.)

2. **Definición de Número Natural** En clase construimos un criterio para decidir cuando un conjunto es un número natural, pruebe que las siguientes son equivalentes:
   (a) El conjunto n es un número natural.
      i. n es un conjunto transitivo
      ii. $< n, \in_n > \in$ COBO (estricto)
      iii. Todo subconjunto no vacío de n tiene $\in$ máximo
   (b) i. n es un conjunto transitivo
      ii. $\in$ es asimétrica sobre n
      iii. si $b \subseteq n$, no vacío, entonces:
         a) b tiene $\in_n$-máximo
         b) b tiene $\in_n$-mínimo
   (c) i. n es un conjunto transitivo
      ii. $\in$ es irreflexiva sobre n
      iii. $\in$ es tricotómica sobre n

iv. si $b \subseteq n$, no vacío, entonces:
  a) b tiene $\in_n$-máximo
  b) b tiene $\in_n$-mínimo

(3ptos.)

3. **Conjuntos Inductivos** En clase probamos que $\omega := \bigcap\{i | i \text{ es inductivo}\}$ está bien definido, por ZF_7. También probamos que $\omega = \{n | n \text{ es un número natural}\} = \mathbb{N}$, y así concluimos que ω es inductivo.
   (a) Sin usar que $\omega = \mathbb{N}$, demuestre que ω es un conjunto inductivo. (Sugerencia: Use la definición de ω) (1pts.)
   (b) Usando que $\omega = \mathbb{N}$, demuestre de dos maneras distintas que $\omega \notin \omega$. (Sugerencia: En ambas suponga $\omega \in \omega$. Para la primera, use que $\omega \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\omega^+ \in \mathbb{N}$ y es un COBO estricto. Para la segunda, si $\omega \in \mathbb{N}$, todo subconjunto no vacío tiene $\in$-máximo. En particular, ω mismo) (2pts.)
   (c) En clase probamos que si I es una clase inductiva, entonces $\omega \subseteq I$. ¿El recíproco es cierto? (1pto.)

4. **Buena Fundación y la Funcional Sucesor** (Este ejercicio es opcional) Bajo la suposición de ABF, la funcional sucesor se comporta como queremos. Suponga ABF y demuestre:
   (a) La funcional sucesor es inyectiva.(0.5pts.)
   (b) El sucesor de un conjunto es el $\in$-sucesor inmediato.

   $$\forall x \neg \exists y (x \in y \& y \in x^+)$$

   (0.5pts.)
   (c) La funcional sucesor no tiene puntos fijos.

   $$\forall x (x \neq x^+)$$

   (0.5pts.)