Tarea Examen IV

Gabriel Cachoa Ocampo

Abril 26, 2016

La tarea se entrega el Viernes 13 de Mayo en el salón y en los primeros diez minutos de la hora de clase, en parejas o individual. No hay tolerancia al plagio.

1. **(Principio de Inducción)** Pruebe por inducción los siguientes enunciados:

   (a) La funcional sucesor es monótona sobre ω:

   $$\forall x, y \in \omega[x \in y \to x^+ \in y^+]$$

   (b) Cada natural es el cero, o lo tiene como elemento:

   $$\forall x \in \omega[x = 0 \vee 0 \in x]$$

   (c) Cada natural es el cero o es el sucesor de otro número natural:

   $$\forall x \in \omega[x = 0 \vee \exists m(x = m^+)]$$

   (Demuestre el enunciado anterior y argumente que m es un número natural)

2. **(Otra prueba al Teorema de Recursión)** Para la prueba del teorema de recursión usamos el principio de inducción sobre ω, ahora queremos dar una prueba en la que apelemos al buen orden de ω. Recuerde que para ordenes lineales son equivalentes ser inductivo y estar bien ordenado. Leer las notas de El Profesor "Recursión para ω" y:

   (a) Pruebe nuevamente 1), haciendo ver que:

   $$\{n \in \omega | n \in Dom(f_1) \cap Dom(f_2) \& f_1(n) \neq f_2(n)\} = \emptyset$$

   (b) Pruebe nuevamente 2) probando que:

   $$\{n \in \omega | \neg\exists f \in \mathcal{A}(Dom(f) = n^+)\} = \emptyset$$

   (c) De otra prueba de la unicidad, probando que:

   $$\{n \in \omega | F_1(n) \neq F_2(n)\} = \emptyset$$

3. **(Variantes a Recursión)** Hay muchas versiones o variantes al teorema de recursión para ω, el objetivo de este ejercicio es probar dos. En clase probamos la siguiente versión:
Si $\mathcal{A}$ es una clase, $a \in \mathcal{A}$, y $G : \mathcal{A} \times \omega \to \mathcal{A}$, entonces hay una única función f_1 tal que:
$f_1 : \omega \to \mathcal{A}$
I) $f_1(0) = a$
II) $\forall n \in \omega[f_1(n^+) = G(f_1(n), n)]$
La prueba de esta variante es análoga a la original, cambiando la definición de función adecuada. Utilice esta variante para probar las siguientes:

   (a) Si a es un conjunto, denotamos al conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de a como ${}^{\underline{\omega}}a$. Formalmente: ${}^{\underline{\omega}}a = \bigcup_{n \in \omega} {}^n a$.
   Demuestre que: Si a es un conjunto y $g :{}^{\underline{\omega}} a \to a$, entonces hay una única función f tal que:
   $$f : \omega \to a$$
   $$\forall n \in \omega[f(n) = g(f \upharpoonright n)]$$
   (Sugerencia: Si $G :{}^{\underline{\omega}} a \times \omega \to{}^{\underline{\omega}} a$ definida por $G(x, n) = x \bigcup \{< n, g(x) >\}$. Entonces, existe una única función $f_1 : \omega \to {}^{\underline{\omega}}a$ tal que $f_1(0) = \emptyset$, $f_1(n^+) = G(f_1(n), n)$. Pruebe que $\{f_1(n) | n \in \omega\}$ es un sistema compatible de funciones, que su unión tiene dominio ω y que es la buscada.)

   (b) Si $\mathcal{A}$ es un conjunto y g una función con $Dom(g) \subseteq \mathcal{A} \times \omega$ e $Img(g) \subseteq \mathcal{A}$, entonces hay una única función f tal que:
   0) $Dom(f) = \omega$ o $Dom(f) = k^+$ donde
   $$k = min\{k \in \omega | (g(k), k) \notin Dom(g)\}$$
   00) $Img(f_4) \subseteq \mathcal{A}$
   I) $f_4(0) = a$
   II)$\forall n \in \omega[n^+ \in Dom(f_4) \to (f_4(n^+ = g(f(n).n)))]$
   (Sugerencia: Sea $a* \notin \mathcal{A}$ y sea $\mathcal{A}* = A \bigcup \{a*\}$. Define $g* : \mathcal{A}* \times \omega \to \mathcal{A}*$ como sigue: $g*(x, n) = g(x, n)$ si $(x, n) \in Dom(g)$ o $g*(x, n) = a*$ en otro caso. Si $G = g*$, la buscada es $f_1 \upharpoonright i$ donde $i = min\{n \in \omega | f_1(n) = a*\}$)
   Demuestre que si $X \subseteq \omega$, entonces existe una función inyectiva f, tal que $Img(f) = X$ y $Dom(f) = \omega$ o $Dom(f) \in \omega$.

4. **(Sistemas Numéricos y Recursión)** Utilizando el teorema de recursión, podemos caracterizar a los sitemas numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ que construimos en clase conjuntistamente estudiándolos como órdenes. Las caracterizaciones de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ las dejaremos par después. Por ahora, demuestren que:

   (a) Si $< A, <_A >$ es un buen orden estricto, no vacío, sin extremo derecho (es decir no acotado superiormente) y tal que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene máximo, entonces:

$$< A, <_A > \simeq < \mathbb{N}, <_\mathbb{N} >$$

(Sugerencia: Defina $f : A \to A$ tal que $f(x) = min_r\{y \in A | x <_A y\}$. ¿Por qué está bien definida? Por recursión, defina $h : \mathbb{N} \to A$ tal que $h(0) = min_r A$ y $h(n^+) = f(h(n))$.)
Dar un ejemplo de un buen orden sin extremo derecho tal que contenga un subconjunto acotado superiormente que no tenga máximo.

(b) Si $< A, <_A >$ es un orden total, no vacío, sin extremos (es decir no acotado superior ni inferiormente), y tal que todo subconjunto acotado superiormente tiene máximo y todo conjunto acotado inferiormente tiene mínimo, entonces:

$$< A, <_A > \simeq < \mathbb{Z}, <_\mathbb{Z} >$$

(Sugerencia: Sea $a_0 \in A$, defina $A^- = \{x \in A | x <_A a_0\}$ y $A^+ = \{x \in A | a_0 <_A x\}$. Pruebe que $< A^+ \cup \{a_0\}, <_A >$ es isomorfo a $< \mathbb{N}, <_\mathbb{N} >$ y que $< A^- \cup \{a_0\}, <_A >$ es isomorfo a $< \mathbb{N}, >_\mathbb{N} >$. En clase probamos: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \cup \{0_\mathbb{Z}\}$ y que $< \mathbb{Z}^-, <_\mathbb{Z} > \simeq < \mathbb{N}, >_\mathbb{N} >$ y $< \mathbb{Z}^+, <_\mathbb{Z} > \simeq < \mathbb{N}, <_\mathbb{N} >$)