Otras Interpretacions de $ZF_1, ..., ZF_4$

Gabriel Cachoa Ocampo

Febrero 2016

Por ahora, cuando hemos leído los axiomas de la teoría de conjuntos hemos interpretado a las variables $a, b, ..., z$ como conjuntos y al símbolo no lógico $\in$ como la pertenencia. Leemos: $x \in y$ como: "El conjunto x pertenece al conjunto y." Sin embargo, podemos interpretar a las variables no como conjuntos, y al símbolo no lógico no como la pertenencia. Darles otro significado. Cambiar la interpretación a otro universo de discurso. En este apartado daremos tres ejemplos de distintas interpretaciones de los axiomas $ZF_1, ..., ZF_4$, discutiremos su significado y verdad con otras interpretaciones. Con El Profesor ya han discutido que estos axiomas son verdaderos al interpretarlos en la jerarquía acumulativa, repitamos esa discusión sobre otros universos. Este tipo de ejercicios serán de utilidad cuando hablemos de los modelos de la teoría de conjuntos.

1 Los Axiomas

Recordar:

1. $ZF_1 : \forall x \forall y[\forall w(w \in x \leftrightarrow x \in y) \rightarrow x = y]$
   Dados dos conjuntos, si les pertenecen los mismos elementos entonces son iguales.

2. $ZF_2 : \exists x \forall y(y \notin x)$
   Existe un conjunto al que no le pertenece ningún otro conjunto.

3. $ZF_3 : \forall x \forall y \exists w[\forall z(z \in w \leftrightarrow (z = x \vee z = y))]$
   Dados dos conjuntos, existe otro al que le pertenecen exactamente los primeros dos.

4. $ZF_4 : \forall x \exists y[\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \& z \in w))]$
   Dado un conjunto, existe otro al que le pertenecen exactamente los que le pertenecen a los que le pertenecen al primero.
   Dado un conjunto, existe otro cuyos elementos son exactamente los elementos de los elementos del primero.

2 Los Naturales con su Órden

Recordar:
$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..., n, n+1, ...\}$
Su órden: $0 <_{\mathbb{N}} 1 <_{\mathbb{N}} 2 <_{\mathbb{N}} ... <_{\mathbb{N}} n <_{\mathbb{N}} n+1 <_{\mathbb{N}} ...$
$\forall x (\exists x) \Leftrightarrow$ Para todo número natural (Existe un número natural)

$$x \in^{(\mathbb{N},<)} y \Leftrightarrow x < y$$

1. $ZF_1^{(\mathbb{N},<)} : \forall x \forall y [\forall w (w < x \leftrightarrow x < y) \rightarrow x = y]$
   Dados dos números naturales, si tienen los mismos antecesores, entonces son iguales.
   Es Verdadero en $(\mathbb{N}, <)$, si fueran distintos, por la dictomia, uno sería mayor que otro, uno sería antecesor del otro, como tienen los mismos antecesores, esto implicaría que hay un número natural que es su propio antecesor, lo cual es falso pues la desigualdad es estricta.

2. $ZF_2^{(\mathbb{N},<)} : \exists x \forall y (y \not< x)$
   Hay un número natural tal que ningún número natural es menor que él.
   Es Verdadero en $(\mathbb{N}, <)$, por ejemplo el 0. Dado cualquier otro natural n,$0 < n$ y por tanto: $n \not< 0$.

3. $ZF_3^{(\mathbb{N},<)} : \forall x \forall y \exists w [\forall z (z < w \leftrightarrow (z = x \vee z = y))]$
   Dados dos números naturales, hay otro tal que sólo los primeros dos números dados son menores que él.
   Es Falso en $(\mathbb{N}, <)$, por ejemplo 28 y el 36 son números naturales. Si tomamos n un número natural tal que $28 < n \& 36 < n$, entonces ocurre que: $30 < n$, es decir 28 y 36 no son los únicos antecesores de n.

4. $ZF_4^{(\mathbb{N},<)} : \forall x \exists y [\forall z (z < y \leftrightarrow \exists w (w < x \& z < w))]$
   Dado un número natural, existe otro tal que los que son menores que él son los que son menores que el primero.
   Es Verdadero en $(\mathbb{N}, <)$, pues dado cualquier n, número natural, él mismo es un número natural con exactamente los mismos antecesores.

Ej. 2.1. *Escribir las interpretaciones con la desigualdad no estricta y decir si son verdaderos o falsos en* $(\mathbb{N}. \leq)$.

3 Los Enteros con la Divisbilidad

Recordar:
$\mathbb{Z} : \{..., -(n+1), n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, n+1, ...\}$

$\forall x (\exists x) \Leftrightarrow$ Para todo número entero(Existe un número entero)
$x \in^{(\mathbb{Z},|)} y \Leftrightarrow$ Existe un número entero p, tal que y=px

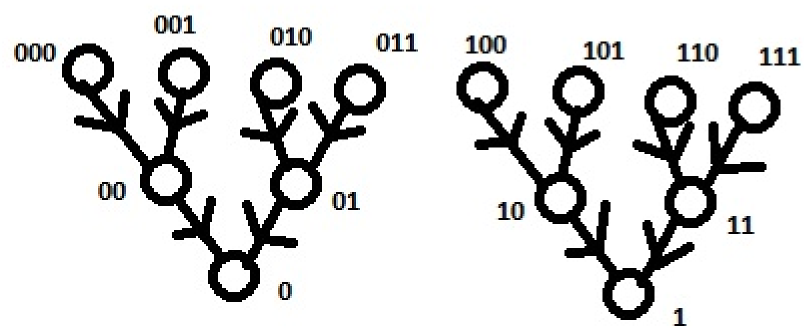

Figure 1: Grágica G

1. $ZF_1^{(\mathbb{Z},|)} : \forall x \forall y[\forall w(w|x \leftrightarrow x|y) \rightarrow x = y]$
   Si dos enteros tienen los mismos divisores, entonces son iguales.
   Es Falso en $(\mathbb{Z}, |)$, por ejemnplo 12 y -12. Tienen los mismos divisores: -12,12,6,-6,4,-4,2,-2,1,-1. Pero no son iguales.

2. $ZF_2^{(\mathbb{Z},|)} : \exists x \forall y(y \nmid x)$
   Hay un número entero sin dividores. Es Falso en $(\mathbb{Z}, |)$, pues todo entero tiene como divisor al 1 (y a él mismo).

3. $ZF_3^{(\mathbb{Z},|)} : \forall x \forall y \exists w[\forall z(z|w \leftrightarrow (z = x \vee z = y))]$
   Dados dos números enteros, hay otro que tiene sólo a los primeros dos como divisores Es Falso en $(\mathbb{Z}, |)$, por ejemplo 28 y el 36 son números enteros. Si tomamos n un número entero tal que $28|n\&36|n$, entonces ocurre que: $2|n$, es decir 28 y 36 no son los únicos divisores de n.

4. $ZF_4^{(\mathbb{Z},|)} : \forall x \exists y[\forall z(z|y \leftrightarrow \exists w(w < x\&z < w))]$
   Dado un entero, existe otro tal que sus divisores son los divisores de los divisores del primero. Es Verdadero en $(\mathbb{Z}, |)$, pues dado cualquier n, número entero, él mismo es un número entero con exactamente los mismos divisores.

4 Un Dibujito

Sea G la gráfica con vértices $v = \{0, 00, 000, 001, 01, 010, 011\}$ y aristas las que se señalan en la gráfica de la Figura 1.

$\forall x (\exists x) \Leftrightarrow$ Para todo vértice en la gráfica (Existe un un vértice en la gráfica)
$x \in^{(G,\longleftarrow)} \Leftrightarrow$ La arista $x \longleftarrow y$ está en la gráfica G.

1. $ZF_1^{(G,\longleftarrow)} : \forall x \forall y [\forall w (w \longleftarrow x \leftrightarrow x \longleftarrow y) \rightarrow x = y]$
   Si dos vértices flechan a los mismos elementos, son iguales.
   Es Falso en $(G, \longleftarrow)$, por ejemplo 000,001

2. $ZF_2^{(G,\longleftarrow)} : \exists x \forall y (y \not\leftarrow x)$
   Hay un vértice que no flecha a ningún elemento Es Verdadero en $(G, \longleftarrow)$, por ejemplo 000

3. $ZF_3^{(G,\longleftarrow)} : \forall x \forall y \exists w [\forall z (z \longleftarrow w \leftrightarrow (z = x \vee z = y))]$
   Dados dos vértices, existe un tercero tal que sólo lo flechan los primeros dos. Es Falso $(G, \longleftarrow)$, por ejemplo 000, 111 no flechan a ninguno en comun

4. $ZF_4^{(G,\longleftarrow)} : \forall x \exists y [\forall z (z \longleftarrow y \leftrightarrow \exists w (w \longleftarrow x \& z \longleftarrow w))]$
   Dado un vértice hay otro que flecha exactamente a los que flechan los que flecha el primero. Es Verdadero en $(G, \longleftarrow)$, se verifica por inspección. Por ejemplo, 000 flecha al 00, y éste flecha al 0. Tomando al 01, éste flecha al 0. En este sentido la unión del 000 es el 0.

Ej. 4.1. *¿Existen gráficas finitas (no triviales) en las que los axiomas ZF1,...,ZF4 sean verdaderos?*