AXIOMATIZACION DE LA TEORIA DE CONJUNTOS ZERMELO - FRAENKEL

La teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (**ZF**) está formulada en la Lógica de primer orden con igualdad y cuyo único símbolo no–lógico es el predicado binario $\in$.

El primer axioma que veremos es previo a la Jerarquía Acumulativa: lo único que nos interesa de los conjuntos son sus elementos.

ZF$_1$: **Axioma de Extensionalidad** :
Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

$$\forall x \forall y \Big[\forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y) \;\rightarrow\; x = y \Big]$$

Obsérvese, que **no** es necesario postular la conversa de la implicación, e.d. postular que si los conjuntos fueran iguales, tendrían los mismos elementos,

$$\forall x \forall y \Big[x = y \;\rightarrow\; \forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y) \Big]$$

ya que ésta es una ley lógica.

Es por este mismo hecho, que para probar que dos conjutos son distintos es suficiente con probar que ambos no cumplen una misma propiedad; en particular se podría probar que hay un elemento que pertenece a uno y no a otro:

$$\forall x \forall y \Big[\exists w \Big((w \in x \;\&\; w \notin y) \;\vee\; (w \notin x \;\&\; w \in y) \Big) \rightarrow x \neq y \Big]$$

ZF$_1$ nos garantiza que dados **dos** conjuntos hay al menos un conjunto que pertenece a uno y no al otro:

$$\forall x \forall y \Big[x \neq y \rightarrow \exists w \Big((w \in x \;\&\; w \notin y) \;\vee\; (w \notin x \;\&\; w \in y) \Big) \Big]$$

ZF$_2$: **Axioma de Existencia o del Conjunto Vacío** :
Hay un conjunto sin elementos.

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

En la Jerearquía Acumulativa, en el Universo de los conjuntos puros, $\mathbf{V}$, es verdad este hecho, dicho conjunto es contruido en el segundo nivel o si se prefiere, está en el segundo estrato.

Proposición$_1$. El conjunto cuya existencia es postulado por **ZF$_2$** es único.
Prueba: Sean a y b conjuntos. Si $a \neq b$, tendríamos, gracias a **ZF$_1$**, que $\exists w (w \in a \;\&\; w \notin b)$ o bien, que $\exists w (w \notin a \;\&\; w \in b)$; en todo caso, tenemos que o

$\exists w(w \in a)$ o tenemos que $\exists w(w \in b)$. Finalmente, tomando la contrapositiva de lo anterior, concluimos que,

$$\forall w(w \notin a) \ \& \ \forall w(w \notin b) \rightarrow a = b$$ †

Notación. El único conjunto postulado por $\mathbf{ZF_2}$, se denotará por: $\emptyset$.

$\mathbf{ZF_3}$: **Axioma del Par** :
Dados dos conjuntos hay otro cuyos únicos elementos son estos dos.

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \Big[w \in z \leftrightarrow \big(w = x \vee w = y \big) \Big]$$

Para justificar la verdad de este axioma –en $\mathbf{V}$– sean R_α y R_β los estratos en que fueron construidos (respectivamente). Así, dicho conjunto puede ser construido en un estrato posterior a ambos, a R_α y a R_β.

Proposición$_2$. El conjunto cuya existencia es postulado por $\mathbf{ZF_3}$ es único.
Prueba: **TAREA**. †

Notación:

1. Si a y b son conjuntos, el único conjunto postulado por $\mathbf{ZF_3}$ se denotará por:

$$\{a, b\}$$

2. Si a es un conjunto, entonces existe el conjunto cuyo único elemento es a. (**Ejercicio**). Llamado *El unitario de* a. Escribiremos $\{ a \}$ en lugar de $\{a, a\}$.

Proposición$_3$. Sean a y b conjuntos. Así, $\{a, b\} = \{b, a\}$.
Prueba: **Ejercicio**. †

De aqui que $\{a, b\}$ reciba el nombre de *Par No–Ordenado.*

Proposición$_4$.

$$\begin{aligned} \bullet) &\ \emptyset \neq \{ \emptyset \} \\ \bullet\bullet) &\ \{ \emptyset \} \neq \{ \{ \emptyset \} \} \\ \bullet\bullet\bullet) &\ \emptyset \neq \{ \{ \emptyset \} \} \\ \bullet\bullet\bullet\bullet) &\ \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \neq \{ \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset \} \} \end{aligned}$$

Prueba: **Ejercicio**. †

ZF$_4$: **Axioma de la Unión** :
Para cada conjunto hay otro cuyos elementos son los elementos de los elementos del conjunto dado.

$$\forall x \exists z \forall w \Big[w \in z \leftrightarrow \exists y \big(y \in x \;\&\; w \in y \big) \Big]$$

Puesto que los miembros de los miembros de un conjunto a han sido construidos en estratos anteriores al de a, entonces $\bigcup a$ puede construirse en el mismo estrato que el de a –si no es que antes. por tanto este axioma es verdadero en $\mathbf{V}$.

Proposición$_5$. El conjunto postulado por **ZF$_4$** es único.
Prueba: **TAREA**. †

Notación. Sea a un conjunto. El único conjunto postulado por **ZF$_4$** , se denotará:

$$\Big\{ w \;/\; \exists y (y \in a \;\&\; w \in y) \Big\} \quad \text{o por} \quad \bigcup a$$

Proposición$_6$.

$$\bullet) \;\; \bigcup \emptyset = \emptyset \qquad\qquad \bullet\bullet\bullet) \;\; \bigcup \big\{ \{ \emptyset \} \big\} = \{ \emptyset \}$$

$$\bullet\bullet) \;\; \bigcup \{ \emptyset \} = \emptyset \qquad\qquad \bullet\bullet\bullet\bullet) \;\; \bigcup \big\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \big\} = \{ \emptyset \}$$

Prueba: **Ejercicio**. †

Obsérvese que,

$$\bigcup \big\{ a,\, b \big\} = \Big\{ w \;/\; \exists y (y \in \{a, b\} \;\&\; w \in y) \Big\} = \Big\{ w \;/\; w \in a \vee w \in b \Big\}$$

el cual existe por **ZF$_3$** y **ZF$_4$** (y es único por **ZF$_1$**) por lo que pondremos :

$$a \cup b \rightleftharpoons \bigcup \big\{ a,\, b \big\}$$

Introducimos una abreviatura, la cual recobra, o mejor dicho formaliza, la noción de *Subconjunto:* Sean a y b conjuntos así,

$$a \subseteq b \leftrightharpoons \forall w \Big(w \in a \;\rightarrow\; w \in b \Big)$$

La expresión "$a \subseteq b$" debe leerse como, a es un *subconjunto de* b, o a está *contenido en* b. Algunas veces también escribiremos esta relación como "$b \supseteq a$" y cuya lectura es b es un *supraconjunto de* a, o b *contine a* a.

Con esta notación, tenemos como ejemplos:

•) $\forall x\big(\emptyset \subseteq x\big)$ • • •) $\forall x \forall y\Big[(x \subseteq y)\ \&\ (y \subseteq x)\ \rightarrow\ (x = y)\Big]$ (**ZF**$_1$)

• •) $\forall x\big(x \subseteq x\big)$ • • • •) $\forall x \forall y \forall z\Big[(x \subseteq y)\ \&\ (y \subseteq z)\ \rightarrow\ (x \subseteq z)\Big]$

Otra notación necesaria es la de *Subconjunto Propio*:

$$a \subsetneq b \fallingdotseq (a \subseteq b)\ \&\ (a \neq b)$$

La expresión "$a \subsetneq b$" debe leerse como, a es un *subconjunto propio* de b. Y tiene las siguientes propiedades:

•) $\neg \forall x(\emptyset \subsetneq x)$

$\forall x\Big[x \neq \emptyset\ \rightarrow\ \emptyset \subsetneq x\Big]$

• •) $\forall x \neg(x \subsetneq x)$

• • •) $\forall x \forall y\Big[(x \subsetneq y)\ \rightarrow\ (y \subsetneq x)\Big]$

• • • •) $\forall x \forall y \forall z\Big[(x \subsetneq y)\ \&\ (y \subsetneq z)\ \rightarrow\ (x \subsetneq z)\Big]$

Una propiedad importante y de mucha utilidad es la siguiente,

Proposición$_7$. Si a es un conjunto, entonces $\bigcup a$ es el $\subseteq$–menor conjunto que contiene a todos los elementos de a. Es decir,

1. $\forall w\Big[w \in a\ \rightarrow\ w \subseteq \bigcup a\Big]$ y

2. $\forall x\Big[\forall w(w \in a \rightarrow w \subseteq x)\ \rightarrow\ \bigcup a \subseteq x\Big]$.

Prueba:

1. Sea $b \in a$. Debemos probar que $b \subseteq \bigcup a$; sea pues, $c \in b$. Puesto que $c \in b$ y $c \in b$, de la definición de unión, tenemos que $c \in \bigcup a$.

2. Supongamos que b es un conjunto con la propiedad de que $\forall w(w \in a \rightarrow w \subseteq b)$. Queremos probar que $\bigcup a \subseteq b$. Sea pues, $c \in \bigcup a$. Por la definición de unión, hay un $d \in a$ tal que $c \in d$. Ahora, de nuestra suposición, tenemos que $d \subseteq b$, por lo tanto $c \in b$. †

Ahora, pasemos con el siguiente axioma.

ZF$_5$: **Axioma de las Partes o Potencia** :
Dado un conjunto hay otro cuyos elementos son todos los subconjuntos del conjunto dado.

$$\forall x \exists z \forall w\Big[w \in z\ \leftrightarrow\ w \subseteq x\Big]$$

Todo subconjunto de un conjunto, digamos a, aparece –a más tardar– en el mismo estrato que a. Así pues, la colección de todos los subconjuntos puede construirse en el estrato siguiente en el que a fué construido.

Proposición$_8$. El conjunto postulado por **ZF$_5$** es único.
Prueba: **TAREA**. †

Notación. Sea a un conjunto, el único conjunto postulado por **ZF$_5$** , se denotará:

$$\left\{ w \ / \ w \subseteq a \right\} \quad \text{o bien} \quad \wp(a)$$

ZF$_6$: (**Esquema de**) **Axioma de Comprensión o de Separación o del Subconjunto** :
Dados un conjunto y una propiedad, hay un conjunto cuyos elementos son aquellos de este conjunto que tienen dicha propiedad.

$$\forall x \exists z \forall w \Big[w \in z \ \leftrightarrow \ (w \in x) \ \& \ \varphi(w) \Big]$$

donde φ es una $\in$–fórmula en la cual la variable z no ocurre.

Veamos que es cierto este axioma en la Jerarquía Acumulativa. Si se tiene un conjunto, digamos a, todos sus elementos ya fueron construidos en estratos anteriores y si nos fijamos de entre estos en aquellos que cumplan una propiedad, esta colección la podemos construir a más tardar en el mismo estrato en el que se encuentra a.

Proposición$_9$. El conjunto postulado por **ZF$_6$** es único.
Prueba: **TAREA**. †

Notación. Sea a un conjunto y φ una $\in$–fórmula, en la cual la variable z no ocurre, el único conjunto postulado por **ZF$_5$** , se denotará:

$$\left\{ w \ / \ (w \in a) \ \& \ \varphi(w) \right\} \text{o bien} \left\{ w \in a \ / \ \varphi(w) \right\}$$

Una aplicación inmediata de este axioma es la existencia de la intersección, de la diferencia y de la diferencia simétrica de dos conjuntos.

Proposición$_{10}$. Sean a y b conjuntos. Existen los siguientes conjuntos,

1. $a \cap b = \left\{ w \ / \ w \in a \ \& \ w \in b \right\}$

2. $a \setminus b = \left\{ w \ / \ w \in a \ \& \ w \notin b \right\}$

3. $a \triangle b = (a \cup b) \setminus (a \cap b) = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$

Proposición$_{11}$. El conjunto de todos los conjuntos no existe:

$$\neg\exists x \forall y (y \in x)$$

Prueba: Probaremos algo equivalente:

$$\forall x \exists y \ (y \notin x)$$

Sea a un conjunto y consideremos la fórmula $\varphi(w) \leftrightharpoons w \notin w$. Hay, por $\mathbf{ZF_6}$, un conjunto:

$$b = \left\{ w \ / \ w \in a \ \& \ w \notin w \right\}$$

Antes de cualquier otra cosa, debemos observar que debido a la definición de b, se tiene que

$$b \notin b \qquad (*)$$

Pues en caso contrario, tendríamos un absurdo.
Ahora afirmamos que, $b \notin a$. En aras de llegar a una contradicción, supongamos lo contrario, que $b \in a$. Pero de esta suposición y de la observación anterior $(*)$ tenemos que b cumple la propiedad que define a b, es decir, $b \in b$, lo cual contradice nuestra observación. Por lo tanto $b \notin a$. †

Para terminar esta parte, comentaremos un axioma, éste es uno que para el objetivo que nos propusimos —reconstruir la Matemática Clásica— no es necesario y por tanto no lo usaremos; solamente daremos un par de resultados, consecuencia de su suposición.

ABF : **Axioma de Regularidad o Buena Fundación** :
Todo conjunto no-vacio tiene un elemento $\in$–minimal.

$$\forall x \Big[x \neq \emptyset \ \rightarrow \ \exists y \big(\, y \in x \ \& \ \forall z (z \in y \rightarrow z \notin x) \, \big) \Big]$$

La verdad de este axioma en la Jerarquía Acumulativa es evidente desde el momento en que para construir un conjunto debemos tener previamente sus elementos. Un elemento $\in$-minimal de un conjunto dado sería uno que fué primeramente construido.

Proposición. $\neg\exists x \exists y \Big[x \in y \ \& \ y \in x \Big]$.

Prueba: Supongamos lo contrario, supongamos que a y b son conjuntos tales que $a \in b$ y que $b \in a$. El axioma del par ($\mathbf{ZF_3}$) nos garantiza la existencia del conjunto $c = \left\{ a, \, b \right\}$. Pero entonces c sería un testigo en contra del axioma **ABF**, pues c no tiene un elemento $\in$–minimal. †

Un caso particular de esto es el siguiente,

Corolario. $\forall x(x \notin x)$, o equivalentemente, $\neg\exists x\ (x \in x)$.

Observemos que la proposición anterior nos dice que la $\in$ es asimétrica sobre todos los conjuntos y el corolario, que la $\in$ es irreflexiva. No es dificil probar, que bajo la suposición de este principio, no puede haber cadenas finitas cerradas bajo la $\in$.