Álgebra de Conjuntos

Par Ordenado.

Queremos definir lo que es el par ordenado de los conjuntos a y b, el cual simbolizaremos por: $\langle a, b\rangle$. Éste debe ser óbviamente un conjunto y para capturar la noción de ordenado debe cumplir con el hecho de que si c y d son conjuntos, entonces:

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \rightarrow a = c \ \& \ b = d$$

Hay varias maneras de hacer esto, nosotros optamos por la siguiente:

Definición$_1$. *Par Ordenado* (Kazimierz Kuratowski 1921).
Sean a y b conjuntos arbitrarios. Así,

$$\langle a, b\rangle = \left\{\{a\} \ , \ \{a, b\}\right\}$$

La existencia de éste conjunto está garantizada por **ZF$_3$** y su unicidad por **ZF$_1$**.

Proposición$_1$. Sean $a, b, c, d \in V$. Así,

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \rightarrow a = c \ \& \ b = d$$

Prueba: Supongamos que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$. Así pues,

$$\left\{\{a\} \ , \ \{a, b\}\right\} = \left\{\{c\} \ , \ \{c, d\}\right\}$$

por tanto, usando sólamente lógica, tienen los mismos elementos. Los casos posibles se reducen a dos,

(**i**). $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$,

O bien,

(**ii**). $\{a\} = \{c, d\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$.

En el caso (**i**) tenemos que $a = c$ y $b = d$. En el caso (**ii**) tenemos que $a = c = d = b$. En cualquier caso, tenemos lo que queríamos. †

Relacionales y Relaciones.

Definición$_2$. Una clase R es una *Relacional* syss sus elementos son pares ordenados:

$$\forall x \left[x \in R \ \rightarrow \ \exists y \exists z \Big(\big\langle y,\, z \big\rangle = x \Big) \right]$$

Una *Relación* es una relacional que es un conjunto.

De acuerdo con las observaciones que hicimos sobre las clases, las relacionales, en general, no existen. ¿Qué queremos decir, entonces, con que R es una relacional, si R es una clase propia? Bueno, pues si R es una clase, R está definido por una fórmula, digamos φ, así:

$$R = \Big\{ x \ / \ \varphi(x) \Big\}$$

Afirmar que R es una relacional es, pues, afirmar que:

$$\forall x \left[\varphi(x) \rightarrow \exists y \exists z \Big(\langle y,z \rangle \ = \ x \Big) \right]$$

Ejemplos: Sea A una clase. Las siguientes son relacionales:

1. $\emptyset$.
2. $\Big\{ x \ / \ \exists y \exists z \Big(\langle y,z \rangle \ = \ x \Big) \Big\}$
3. $\Big\{ \big\langle x,\, y \big\rangle \ / \ x \in A \ \& \ y \in A \Big\}$.
4. $Id_A = \Big\{ \big\langle x,\, x \big\rangle \ / \ x \in A \Big\}$.
5. $\in_A \ = \Big\{ \big\langle x,\, y \big\rangle \ / \ x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ x \in y \Big\}$.
6. $\subseteq_A \ = \Big\{ \big\langle x,\, y \big\rangle \ / \ x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ x \subseteq y \Big\}$.

Definición$_3$. Sea R una relacional. El *Dominio,* la *Imagen (o Rango)* y el *Campo de* R se definen así:

1. $DOM(R) = \Big\{ x \ / \ \exists y \Big(\big\langle x,\, y \big\rangle \in R \Big) \Big\}$.
2. $IMG(R) = \Big\{ y \ / \ \exists x \Big(\big\langle x,\, y \big\rangle \in R \Big) \Big\}$.
3. $CMP(R) = \Big\{ z \ / \ z \in DOM(R) \vee z \in IMG(R) \Big\} = DOM(R) \cup IMG(R)$.

Lema$_2$. Sea R una relacional. Así,

$$\text{Si } \langle a,\, b\rangle \in R, \text{ entonces } a, b \in \bigcup\bigcup R$$

Prueba:

$$\begin{aligned}\langle a,\, b\rangle \in R \;&\leftrightarrow\; \{\{a\},\, \{a,\, b\}\} \in R\\ &\rightarrow\; \{a\},\, \{a,\, b\} \in \bigcup R\\ &\rightarrow\; a,\, b \in \bigcup\bigcup R\end{aligned}$$

†

Ejercicio: ¿ $CMP(R) = \bigcup\bigcup R$?

Proposición$_3$. Si r es una relación, entonces

$$DOM(r)\;,\; IMG(r)\;,\; CMP(r) \in V$$

Prueba: Si r es una relación, entonces r es una relacional que es un conjunto, e.d. $r \in V.$ Por **ZF**$_4$ (usado dos veces) tenemos que $\bigcup\bigcup r \in V.$ Ahora bien, como

$$DOM(r)\;,\; IMG(r) \subseteq CMP(r) \subseteq \bigcup\bigcup r$$

por el esquema axiomático de comprensión, **ZF**$_6$, tenemos lo que queríamos. †

Definición$_4$. Sean A y B clases. Así,

$$A \times B = \{\langle x,\, y\rangle \;/\; x \in A \;\&\; y \in B\}$$

Proposición$_4$. Si $a,\, b \in V,$ entonces $a \times b \in V.$

Prueba: Si $\langle x,\, y\rangle \in a \times b,$ entonces $x \in a$ y $y \in b.$ Pero entonces,

$$\begin{aligned}x \in a \;\&\; y \in b \;&\rightarrow\; x\,,\, y \in a \cup b\\ &\rightarrow\; \{x\}\,,\, \{x,\, y\} \in \wp(a \cup b)\\ &\rightarrow\; \{\{x\}\,,\, \{x,\, y\}\} \in \wp(\wp(a \cup b))\\ &\leftrightarrow\; \langle x,\, y\rangle \in \wp(\wp(a \cup b))\end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que $a,\, b \in V,$ por **ZF**$_4$ y **ZF**$_5$, tenemos que $\wp(\wp(a \cup b)) \in V.$ Tenemos entonces,

$$a \times b = \{z \in \wp(\wp(a \cup b)) \;/\; \exists x \exists y(x \in a \;\&\; y \in b \;\&\; z = \langle x,\, y\rangle)\}$$

y será un conjunto, gracias a **ZF**$_6$. †

Observaciones.

- Si R es una relacional, entonces
$$R \subseteq DOM(R) \times IMG(R) \subseteq CMP(R) \times CMP(R)$$
- Si R es una relacional y $A = CMP(R)$, entonces $R \subseteq A \times A$

TAREA: Sean A y B clases. Así, $A \times B = \emptyset$ syss $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Definición$_5$. Sean R una relacional y A y B clases.

1. La *Imagen de A bajo R* es,
$$R[A] = \left\{ y \ / \ \exists x \left(x \in A \ \& \ \left\langle x, y \right\rangle \in R \right) \right\}$$
2. La *(Relacional) Inversa de R* es,
$$R^{-1} = \left\{ \left\langle y, x \right\rangle \ / \ \left\langle x, y \right\rangle \in R \right\}$$
3. La *Imagen Inversa de B bajo R* es la imagen de B bajo R^{-1} :
$$R^{-1}[B] = \left\{ x \ / \ \exists y \left(y \in B \ \& \ \left\langle x, y \right\rangle \in R \right) \right\}$$

Proposición$_5$. Sea $R \subseteq A \times B.$ Así,

1. $R[A] = IMG(R)$ y $R^{-1}[B] = DOM(R)$.
2. $DOM(R^{-1}) = IMG(R)$ e $IMG(R^{-1}) = DOM(R)$.
3. $(R^{-1})^{-1} = R$.

Prueba: **Ejercicio**. †

Definición$_6$. Sean R y S relacionales. La *Composición de S con R,* o bien, *R Seguida de S,* queda definida como sigue:
$$S \circ R = \left\{ \left\langle x, z \right\rangle \ / \ \exists y \left[\left\langle x, y \right\rangle \in R \ \& \ \left\langle y, z \right\rangle \in S \right] \right\}$$

Proposición$_6$. Sean R, S y T relacionales

1. $DOM(S \circ R) = R^{-1}\left[IMG(R) \cap DOM(S) \right] = R^{-1}\left[\quad DOM(S) \quad \right]$
2. $IMG(S \circ R) = S\left[IMG(R) \cap DOM(S) \right] = S\left[\quad IMG(R) \quad \right]$
3. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Prueba: **Ejercicio**. †

Ejercicio:

1. ¿ $R^{-1} \circ R = Id_{DOM(R)}$? y
2. ¿ $R \circ R^{-1} = Id_{IMG(R)}$?

Funcionales y Funciones.

Definición$_7$. Sea F una clase. Diremos que F es una *Funcional* syss

1. F es una relacional. Y
2. $\forall x, y_1, y_2 \left[\langle x, y_1 \rangle \in F \ \& \ \langle x, y_2 \rangle \in F \rightarrow y_1 = y_2 \right]$

Y en el caso en que F fuera un conjunto, diremos que F es una *Función.*

Observación. Son equivalentes a **2**, las siguientes:

- $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \left[\langle x_1, y_1 \rangle \in F \ \& \ \langle x_2, y_2 \rangle \in F \ \& \ x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2 \right]$
- $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \left[\langle x_1, y_1 \rangle \in F \ \& \ \langle x_2, y_2 \rangle \in F \ \& \ y_1 \neq y_2 \rightarrow x_1 \neq x_2 \right]$

Notación:

1. Sea F una funcional.

   a. Si $x \in DOM(F)$, escribiremos $F(x)$, para denotar al único conjunto que cumple con que $\langle x, F(x) \rangle \in F$. Dicho de otra manera,

   $$F(x) = \bigcap \left\{ y \ / \ \langle x, y \rangle \in F \right\}$$

   Nota: Si $x \notin DOM(F)$, la notación $F(x)$ *NO* tiene sentido y estará prohibida.

   b. Si $\langle x, y \rangle \in F$, algunas veces escribiremos $x \underset{F}{\mapsto} y$ o simplemente $x \mapsto y$.

2. Escribiremos $F : A \rightarrow B$, para denotar que:

   a. F es una funcional,

   b. El dominio de F es la clase A. En símbolos: $DOM(F) = A$, y

   c. La imagen de F es una subclase de la clase B. En símbolos: $IMG(F) \subseteq B$. A B se le llamará *(un) Contradominio o (un) Codominio.*

3. $FNC = \left\{ f \ / \ f \text{ es una función} \right\}$.

Ejemplos:

1). $\bigcup : V \rightarrow V$

$$\bigcup(x) = \left\{ w \ / \ \exists y \ (y \in x \ \& \ w \in y) \right\}$$

2). $\cup : V \times V \to V$
$\langle a,\, b\rangle \mapsto a \cup b \quad \left(= \left\{w \;/\; (w \in a \vee w \in b)\right\}\right)$

3). $\wp : V \to V$
$x \mapsto \wp(x)$

4). $Id_A : A \to A$
$x \mapsto x,$ para todo $x \in A.$

5). $\{\_\,,\,\_\} : V \times V \to V$
$\langle a,\, b\rangle \mapsto \{a,\, b\}$

6). $\{\_\} : V \to V$
$x \mapsto \{x\}$

7). El conjunto $\emptyset$ es una **función**, es decir, $\emptyset \in FNC.$
Con $DOM(\emptyset) = \emptyset$ e $IMG(\emptyset) = \emptyset.$ Podemos escribir,

$$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$$

O también,

$$\emptyset : \emptyset \to A$$

donde A es cualquier clase.

Proposición$_7$. Sean F y G funcionales. Así, $F = G$ syss

i). $DOM(F) = DOM(G).$ Y

ii). $\forall x \in DOM(F)\left[F(x) = G(x)\right].$

Prueba: **TAREA**. †

Definición$_8$. Sea $F : A \to B.$ Diremos que,
F es *Inyectiva* o que F es 1 *a* 1 syss

$$\forall x_1,x_2,y_1,y_2\left[\langle x_1,\, y_1\rangle \in F \;\&\; \langle x_2,\, y_2\rangle \in F \;\&\; y_1 = y_2 \;\to\; x_1 = x_2\right]$$

Son equivalentes a que F es inyectiva,

$$\forall x_1,x_2,y_1,y_2\left[\langle x_1,\, y_1\rangle \in F \;\&\; \langle x_2,\, y_2\rangle \in F \;\&\; x_1 \neq x_2 \;\to\; y_1 \neq y_2\right]$$

o,

$$\forall x_1,x_2 \in A\left[F(x_1) = F(x_2) \;\to\; x_1 = x_2\right]$$

Notación: $F : A \rightarrowtail B$

Definición$_9$. Sea $F : A \to B.$ Diremos que,
F es *Suprayectiva* o que F es *Sobre* B syss

$$\forall y \in B \, \exists x \in A \left[\left\langle x, y \right\rangle \in F \right]$$

equivalentemente, $IMG(F) = F[A] = B.$

Notación: Algunas veces escribiremos:

$$F : A \twoheadrightarrow B$$

Definición$_{10}$. Sea $F : A \to B.$ Diremos que,
F es *Biyectiva* syss F es inyectiva y suprayectiva.

Notación: Algunas veces escribiremos:

$$F : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \quad \text{o} \quad A \underset{F}{\sim} B$$

Y diremos que A *es equipotente con* B

Proposición$_8$. Sea F una funcional.
F^{-1} es una funcional syss F es inyectiva.
Prueba: **TAREA**. †

Definición$_{11}$. Sea F una funcional y A una clase.

$$F \restriction A = \left\{ \left\langle x, y \right\rangle \in F \;/\; x \in A \right\}$$

Así, $F \restriction A$ es una funcional, con $DOM(F \restriction A) = DOM(F) \cap A$ e $IMG(F \restriction A) \subseteq IMG(F).$ Obsérvese que si $A \cap DOM(F) = \emptyset,$ entonces $F \restriction A = \emptyset.$

Definición$_{12}$. Sean $a, b \in V.$

$${}^{a}b = \left\{ f \;/\; f : a \to b \right\}$$

Proposición$_9$. Si $a, b \in V,$ entonces ${}^{a}b \in V.$
Prueba: Si $f \in {}^{a}b,$ entonces $f \subseteq a \times b;$ por lo que ${}^{a}b \subseteq \wp(a \times b).$ Finalmente, si $a, b \in V,$ sabemos que $a \times b \in V;$ ahora, por el axioma de potencia (**ZF$_5$**), $\wp(a \times b) \in V$ y por comprensión (**ZF$_6$**), resulta que ${}^{a}b \in V.$ †

¿Quién es ${}^{\emptyset}b$ y quién ${}^{a}\emptyset$? **Ejercicio**.

Recordemos que la composición está definida para relacionales, por ende, a las funcionales:

Si F y G son funcionales, entonces

$$G \circ F = \Big\{ \big\langle x,\, z \big\rangle \ / \ \exists y \Big[\big\langle x,\, y \big\rangle \in F \ \& \ \big\langle y,\, z \big\rangle \in G \Big] \Big\}$$

Proposición$_{\mathbf{10}}$. Sean F y G funcionales. Así,

i). $G \circ F$ es una funcional.

ii). Si $IMG(F) \subseteq DOM(G)$, entonces

$$G \circ F : DOM(F) \to IMG(G)$$

ii). $\forall x \in DOM(G \circ F) \Big[(G \circ F)(x) = G(F(x)) \Big]$.

Prueba: **Ejercicio**. †

Dos funcionales, como relacionales que son, su unión es otra relacional.¿Cúando, es decir bajo qué condiciones, es una funcional?

Definición$_{\mathbf{13}}$. Sean F y G funcionales. Diremos que F y G son *Compatibles* syss

$$\forall x \in (DOM(F) \cap DOM(G)) \Big[F(x) = G(x) \Big]$$

Proposición$_{\mathbf{11}}$. Sean F y G funcionales.

1. $F \cup G$ es una funcional syss F y G son compatibles.

2. F y G son compatibles syss

$$F \restriction (DOM(F) \cap DOM(G)) = G \restriction (DOM(F) \cap DOM(G))$$

3. Como relacionales que son F y G, se tiene:

a. $DOM(F \cup G) = DOM(F) \cup DOM(G)$ e

b. $IMG(F \cup G) = IMG(F) \cup IMG(G)$

Prueba: *Ejercicio.* †

Generalizamos esta noción para una clase de funciones.

Definición$_{\mathbf{14}}$. Sea $\mathcal{F} \subseteq FNC.$ Diremos que $\mathcal{F}$ es, o forma, un *Sistema Compatible de Funciones* syss cqsean $f,\ g \in \mathcal{F}$, se tiene que f y g son compatibles.

Proposición$_{\mathbf{12}}$. Sea $\mathcal{F}$ un sistema compatible de funciones. Así,

1. $\bigcup \mathcal{F}$ es una funcional.

a. $DOM(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \Big\{ DOM(f) \ / \ f \in \mathcal{F} \Big\}$

b. $IMG(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \Big\{ IMG(f) \ / \ f \in \mathcal{F} \Big\}$

2. Para cualesquiera conjuntos x e y, se tiene

$$\langle x, y\rangle \in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}\left[\langle x, y\rangle \in f\right]$$

o bien,

$$x \in DOM\left(\bigcup \mathcal{F}\right) \ \& \ \left(\bigcup \mathcal{F}\right)(x) = y \leftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}\left[x \in DOM(f) \ \& \ f(x) = y\right]$$

Prueba: **TAREA**. †

Para finalizar, un poco de:

Notación: Sea F una funcional, con $DOM(F) = I$.

1. $$F \rightleftharpoons \langle F(i) \ / \ i \in I\rangle \rightleftharpoons \langle F(i)\rangle_{i\in I}$$
$$\rightleftharpoons \langle F_i \ / \ i \in I\rangle \rightleftharpoons \langle F_i\rangle_{i\in I}$$

2. $$IMG(F) = \{F(i) \ / \ i \in I\} \rightleftharpoons \{F(i)\}_{i\in I}$$
$$\rightleftharpoons \{F_i\}_{i\in I}$$

Se le suele llamar una *Familia de conjuntos con Indices en* I.

OjO: No confundir $\langle F(i) \ / \ i \in I\rangle$, que es la funcional, con su imagen, $\{F(i) \ / \ i \in I\}$

3. $$\bigcup IMG(F) = \bigcup \{F(i) \ / \ i \in I\} \rightleftharpoons \bigcup_{i\in I} F(i)$$
$$\rightleftharpoons \bigcup_{i\in I} F_i$$

4. $$\bigcap (IMG(F)) = \bigcap \{F(i) \ / \ i \in I\} \rightleftharpoons \bigcap_{i\in I} F(i)$$
$$\rightleftharpoons \bigcap_{i\in I} F_i$$