Números Naturales

Von Neumann (1923): un *Número Natural* es el *Conjunto* de los números naturales anteriores a él. Abusando de la notación, podemos poner:

$$n+1 = \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$$

Así, nosotros podríamos definir natural por natural, de la siguiente manera:

Definición$_1$.
$0 = \emptyset$
$1 = \{\ 0\ \} = \{\ \emptyset\ \}$
$2 = \{0,\ 1\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$
$3 = \{0,\ 1,\ 2\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
$4 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$
$\vdots$

Obsérvese que estas definiciones están bien dadas, puesto que se basan en: **ZF**$_1$, **ZF**$_2$ y **ZF**$_3$.

CONSTRUCCIÓN

La definición de número natural que optamos, la de Von Newman, es una *definición puntual* y se quisiera una *definición global* es decir una de la forma:

x es un número natural **syss** x es un conjunto tal, que $\ldots$

(donde, obviamente, en ..., **no** debe aparecer involucrada la noción de número natural).

Para darla, tratemos de entresacar propiedades que tengan en común los conjuntos de *La Lista:* $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ e intentar dar dicha definición.

Vemos a simple vista, que los conjuntos de *la lista* cumplen con dos propiedades:

(**1**) Todo elemento de uno de *la lista* está en *la lista*. Dicho de otra manera: todo elemento de un número natural es otro número natural. Dejemos por lo pronto pendiente esta propiedad.

(**2**) El “orden” entre ellos es $\in$:

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in\ \ldots$$

Informalmente: Si n y m están en *la lista*

$$n < m \text{ syss } n \in m$$

Veamos esto más de cerca:

Entre los elementos de uno de ellos, digamos $n,$ la $\in$ lo ordena totalmente: En símbolos:

$$\langle n, \ \in_n \rangle \in COTO$$

en sentido **estricto**, es decir, la $\in$ es irreflexiva sobre $n.$ Más aún, la $\in$ lo bien ordena: Todo subconjunto no–vacío de n tiene un elemento $\in$–mínimo:

$$\langle n, \ \in_n \rangle \in COBO$$

OjO: $\{1, 2, 3\} \in COBO,$ pero no es uno de *la lista*. Así, el ser bien ordenado por la $\in$ es una condición necesaria pero no suficiente como para estar en *la lista*.

Otra propiedad que vemos que tienen es,

(**3**) Los de *la lista*, cumplen con,

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ \ldots$$

y al mismo tiempo con,

$$0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \ldots$$

Es decir, cada vez que un elemento, uno de *la lista*, pertenece a otro al mismo tiempo es un subconjunto. Esta propiedad tiene un nombre específico.

Definición$_2$. Un conjunto a se dice que es un *(Conjunto) Transitivo* syss

$$\forall y\left[y \in a \ \rightarrow \ y \subseteq a \right]$$

Observación. Los siguientes enunciados son equivalentes.

- **a**) $\forall y\left[y \in a \ \rightarrow \ y \subseteq a \right]$
- **b**) $\forall y\left[y \in a \ \rightarrow \ y \in \wp(a) \right]$
- **c**) $a \subseteq \wp(a)$
- **d**) $a \in \wp(\wp(a))$
- **e**) $\forall x,y\left[\left(x \in y \ \& \ y \in a \right) \ \rightarrow \ x \in a \right]$
- **f**) $\bigcup a \subseteq a$
- **g**) $\bigcup a \in \wp(a)$

Todas éstas son definiciones alternativas. Debido al **e**) es el nombre de transitivo.

Esta noción se generaliza para clases y relacionales arbitrarias:

Definición$_3$. Sean A una clase y R una relacional. Diremos que la clase A es R–*Transitiva* syss

$$\forall x,y\Big[(xRy \ \& \ y \in A) \ \rightarrow \ x \in a\Big]$$

Dicho de una manera coloquial, A es R–Transitiva syss A es cerrada bajo R-predecesores. Observemos que A sea $\in$–transitiva es lo mismo que A sea transitiva.

Consideremos $a = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. El conjunto a es un transitivo que no está en *la lista*. Así tampoco, el ser transitivo, es una condición suficiente para estar en *la lista*. En este mismo conjunto a, vemos que la $\in$ no es transitiva y por tanto la $\in$ no lo ordena totalmente y, mucho menos, lo bien ordena (esto nos dá un ejemplo de que las nociones de ser un conjunto transitivo y de que la $\in$ sea transitiva no son equivalentes).

Ahora pensemos en un conjunto que es tanto transitivo como bien ordenado por la pertenencia; ¿estará en *la lista*? Hay un problema; bien podríamos tener uno con estas propiedades y ser "muy grande", ser un conjunto ¡infinito! y todos los de la lista son"finitos" (esa es la idea, a pesar de no tener la definición de infinito). Esta idea de "finitud" se puede capturar de la siguiente manera:

(**4**). Todo subconjunto no-vacío, de uno de *la lista*, tiene $\in$–máximo.

Con esto tenemos las herramientas suficientes para poder dar una definición global de número natural:

Definición$_4$. Un conjunto n es un *(Número) Natural* syss

•) n es un conjunto transitivo.

••) $\langle n, \ \in_n \rangle \in COBO$ en forma estricta. Y

•••) Todo subconjunto no–vacío de n, tiene $\in_n$ –máximo.

Observación:

Entre los elementos de un natural no hay cadenas "finitas" cerradas con la $\in$, en particular un natural no se pertenece a sí mismo (la $\in$ es irreflexiva sobre cualquier natural) y no tiene dos elementos que se pertenezcan mutuamente (la $\in$ es asimétrica sobre cualquier natural).

Una manera económica de trabajar con la definición de natural, nos la dá la siguiente:

Proposición$_1$. Son equivalentes:

1. n es un natural

2. **i**) n es un conjunto transitivo.

ii) $\in$ es asimétrica sobre n : $\neg\exists x,y \in n \left[x \in y \ \& \ y \in x \right]$

iii) Si b es un conjunto tal que $\emptyset \neq b \subseteq n,$ entonces

a) b tiene $\in_n$ –mínimo; y

b) b tiene $\in_n$ –máximo.

3. **i**) n es un conjunto transitivo.

ii) $\in$ es irreflexiva sobre n : $\forall x \in n \, [x \notin x]$

iii) $\in$ es tricotómica sobre n : $\forall x,y \in n \left[x \in y \ \vee \ y = x \ \vee \ y \in x \right]$

iv) Si b es un conjunto tal que $\emptyset \neq b \subseteq n,$ entonces

a) b tiene $\in_n$ –minimal; y

b) b tiene $\in_n$ –maximal.

Prueba: **TAREA**. †

Notación:

$$\mathbb{N} = \left\{ x \ / \ x \text{ es un natural} \right\}$$

De principio, $\mathbb{N}$ es una clase, quedará pendiente el responder a la pregunta: ¿ existe $\mathbb{N}$? es decir, ¿ $\mathbb{N} \in V$?

Por lo pronto, pasemos a ver que nuestra definición de número natural nos está funcionando bien; veamos la propiedad (**1**):

Proposición$_2$. Todo elemento de un natural, es un natural; o bien:

$\mathbb{N}$ es una clase transitiva.

Prueba: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in n.$ Veamos que $x \in \mathbb{N}$:

i). x es transitivo: Es inmediato de que n es transitivo y de que $\in$ es transitiva sobre $n.$

ii). $\in$ es asimétrica sobre x : Ver la **observación** anterior.

iii). Sea b tal que $\emptyset \neq b \subseteq x.$ Puesto que n es transitivo y $x \in n,$ tenemos que $\emptyset \neq b \subseteq n.$ Así, b tiene tanto $\in_n$ –máximo como $\in_n$ –mínimo y por tanto (**Tarea**) b tiene

$\in_x$ –máximo y $\in_x$ –mínimo. De hecho:

$$min_{\in_x} b = min_{\in_n} b \quad \text{y} \quad max_{\in_x} b = max_{\in_n} b \qquad \dagger$$

Otra propiedad que vemos que tienen los de *la lista*, es:

(**5**): A los de *la lista*, los podemos "descomponer" de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
2 &= \{0,1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\}, \\
3 &= \{0,1,2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\}, \\
4 &= \{0,1,2,3\} = \{0,1,2\} \cup \{3\} = 3 \cup \{3\}, \\
5 &= 4 \cup \{4\}, \ \ldots
\end{aligned}$$

Y por supuesto, podemos escribir que $1 = \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = 0 \cup \{0\}$. Al 0, no podemos "descomponerlo", éste ocupa un lugar privilegiado. Abusando de la notación, solo para dar una idea de lo que está pasando, escribimos esto como:

$$n + 1 = n \cup \{n\}$$

Esto nos dá la idea de que los de *la lista*, los podemos ir "recorriendo" uno por uno partiendo desde el 0. Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que con los axiomas que tenemos (de hecho, con $\mathbf{ZF_1}$, $\mathbf{ZF_3}$ y $\mathbf{ZF_4}$), podemos probar:

$$\forall x \exists ! y (y = x \cup \{x\})$$

lo que nos define una funcional:

Definición$_5$.

$$\_^+ : V \longrightarrow V$$
$$\forall x, \quad x^+ = x \cup \{x\}$$

Si a es un conjunto, al conjunto a^+ le llamaremos, *el Sucesor de* a.

Observaciones:

i). $\_^+ = \Big\{ \langle x,y \rangle \ / \ y = x \cup \{x\} \Big\} = \Big\{ w \ / \ \exists x \, \exists y \Big(w = \langle x,y \rangle \ \& \ y = x \cup \{x\} \Big) \Big\}.$

ii). $0^+ = 1, \ 1^+ = 2, \ 2^+ = 3, \ 3^+ = 4, \ \ldots$

iii). $\forall x \left(x \in x^+ \ \& \ x \subseteq x^+ \right)$

iv). $0 \notin IMG\left(\_^+ \right)$, o equivalentemente, $\neg \exists x (x^+ = 0)$

Como veremos más adelante –ahora es imposible– la funcional sucesor al restringirla a los números naturales, $^+ \restriction \mathbb{N}$, trabaja "a las mil maravillas". Entre un natural y su sucesor no hay otro –el sucesor de un natural, es su *Sucesor Inmediato*– y también es inyectiva, no hay dos naturales con el mismo sucesor.

Estas propiedades, en general, no son ciertas. Al decir que el sucesor es un sucesor inmediato, lo que queremos es que la funcional sucesor trabajara de la siguiente manera:

$$\forall x \neg \exists y \left(x \in y \ \& \ y \in x^+ \right)$$

Bien podría ser –nadie, hasta ahora, nos lo impide– que hubiera un conjunto a tal, que $a = \{a\}$ y en este caso, $a^+ = a \cup \{a\} = a \cup a = a$ y, obviamente, tendríamos que $a \in a \in a^+$.

Ahora bien, para que la sucesor fuera inyectiva, deberíamos tener que,

$$\forall x,y \left[x \neq y \ \rightarrow \ x^+ \neq y^+ \right]$$

Esto en general no ocurre. Pensemos que hubiera conjuntos b y c tales, que $b \neq c$ y que $b = \{c\}$ y $c = \{b\}$. Pero si esto fuera así, tendríamos que:

$$b^+ = b \cup \{b\} = b \cup c = c \cup b = c \cup \{c\} = c^+$$

lo que negaría la inyectividad de la sucesor.

En cambio, si tuvieramos a la mano al axioma de buena fundación, **ABF**, ésta dos propiedades **si** valdrían en general (ver la **Tarea 1**). Y por supuesto, hay casos particulares –aparte de los naturales– en los que alguna de estas propiedades son ciertas.

Ahora, regresando con la idea de que cada natural, salvo por el 0, lo podemos escribir –decíamos: "descomponer"– como el sucesor del anterior, introducimos la siguiente,

Definición$_6$. Una clase I es *Inductiva* syss

a) $0 \in I$

b) $\forall x \left[x \in I \ \rightarrow \ x^+ \in I \right]$

Así, una clase inductiva es una que tiene como elemento al 0 y es cerrado bajo la funcional sucesor. Como es de esperarse:

Proposición$_3$. $\mathbb{N}$ es una clase inductiva:

a) $0 \in \mathbb{N}$

b) $\forall x \left[x \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ x^+ \in \mathbb{N} \right]$

Prueba:

a). $0 \in \mathbb{N}$: Trivial.

b). Sea $n \in \mathbb{N}$, veamos que $n^+ \in \mathbb{N}$:

i) n^+ es transitivo : Pues si $x \in n^+ = n \cup \{n\}$, entonces tenemos dos casos; $x \in n$ o $x = n.$ En ambos casos tenemos que $x \subseteq n$ y como $n \subseteq n \cup \{n\} = n^+$, concluimos que $x \subseteq n^+$.
ii) $\in$ es asimétrica sobre n^+ : Sean $x,y \in n^+ = n \cup \{n\}$, tenemos tres casos.
Si $x,y \in n$, la $\in$ es asimétrica sobre $n.$ Si $x,y \in \{n\}$, entonces $x = n = y$ y sabemos que $\in$ es irreflexiva sobre $n.$ El último caso, s.p.g., es cuando $x \in n$ y $y \in \{n\}$, es decir $x \in n = y$; en este caso no puede ser que $y \in x$, pues si lo fuera, por la transitividad de $\in$ y la irreflexividad de $\in$, concluiríamos que $n \in n$.
iii) Sea b un conjunto tal, que $\emptyset \neq b \subseteq n^+$. Tenemos que $b \subseteq n \cup \{n\}$ y por tanto, hay dos casos:

$n \notin b\,\big]$ Aquí, $\emptyset \neq b \subseteq n$ y como $n \in \mathbb{N}$, b tiene $\in_n$ –mínimo, el cual nos sirve como el $\in_{n^+}$ –mínimo. Análogamente para el $\in_{n^+}$ –máximo.

$n \in b\,\big]$ El $\in_{n^+}$ –máximo de b es $n.$ Ahora, fijémonos en $b \setminus \{n\}$. Si $b \setminus \{n\} = \emptyset$, entonces $b = \{n\}$ y n es el $\in_{n^+}$ –mínimo. Si $b \setminus \{n\} \neq \emptyset$, entonces $b \setminus \{n\}$ tiene un $\in_n$ –mínimo, el cual nos sirve para ser el $\in_{n^+}$ –mínimo de b. †

Con esto obtenemos que todo aquel conjunto que está en *la lista* es un número natural.

La definición que dimos de inductivo es para clases en general pero,

¿Hay **conjuntos** inductivos?

La respuesta no es nada trivial: Con los axiomas que tenemos hasta ahora:

¡**No** podemos *probar* ni *refutar* la existencia de conjuntos inductivos!

Así pues, necesitamos postular dicha existencia. Además esto nos ayudará a probar que la clase de los números naturales, $\mathbb{N}$, es un conjunto.

ZF$_7$: **Axioma de Infinito** :
Hay un conjunto Inductivo.

$$\exists x\Big[\emptyset \in x \;\;\&\;\; \forall y\big(\, y \in x \rightarrow y^+ \in x\,\big)\Big]$$

Lo primero que debemos notar es que un conjunto inductivo, digamos i, tendría que tener a “todos” los elementos de nuestra lista:

$$0, 0^+, (0^+)^+, \ldots \;\in i$$

Y decimos “todos” pero, recordemos que, solamente tenemos definidos a los primeros de ellos. Informalmente hablando, $\mathbb{N} \subseteq i$ para todo conjunto inductivo $i.$ Para aterrizar esta idea, empezamos con la siguiente,

Definición$_7$. Sea ω la intersección de todos los conjuntos inductivos. En símbolos:

$$\omega = \bigcap \left\{ i \ / \ i \text{ es inductivo} \right\}$$

Esta definición está justificada por **ZF$_7$** (la intersección de una clase no-vacía, existe; es un conjunto). Veamos que todos los naturales pertenecen a ω.

Proposición$_4$. Cada número natural pertenece a todo conjunto inductivo. En símbolos:

$$\mathbb{N} \subseteq \omega$$

Prueba: La haremos por reducción a lo absurdo. Supongamos pues, $\mathbb{N} \not\subseteq \omega$. Así, hay conjuntos n e i tales que $n \in \mathbb{N}$, i es inductivo y $n \notin i$. Por la **proposición$_3$**, tenemos que $n^+ \in \mathbb{N}$. Sea

$$b = n^+ \setminus i = \left\{ x \in n^+ \ / \ x \notin i \right\}$$

puesto que $n \in n^+ \setminus i$, tenemos que $\emptyset \neq b \subseteq n^+$. Por tanto, b tiene un $\in_{n^+}$ –mínimo en n^+, digamos m : Así,

i). $m \in b$ y

ii). $\forall x \in n^+ \left[\ x \in b \rightarrow (m \in x) \vee (m = x) \ \right]$

O, equivalentemente,

i'). $m \in n^+$ y $m \notin i$. Y

ii'). $\forall x \in n^+ \left[\ x \in m \rightarrow x \in i \ \right]$

(tenemos **ii'**) por contrapositiva y gracias a que $\in$ es tricotómica sobre n^+).

Af$_1$.

1. $m \in \mathbb{N}$: Pues $m \in n^+$ y $n^+ \in \mathbb{N}$, y $\mathbb{N}$ es transitiva.

2. $\emptyset \neq m \subseteq m$: Puesto que $\emptyset \in i$ y $m \notin i$ (por **i'**).) tenemos que $m \neq \emptyset$.

3. $m \subseteq i$: Por **ii'**).

Por **Af$_{1.1}$** y **Af$_{1.2}$** tenemos que m tiene un elemento $\in_m$ –máximo, digamos p. Así,

(*). $p \in m$ y

(**). $\forall x \left[\ x \in m \rightarrow (x \in p) \vee (x = p) \ \right]$

Por **Af$_{1.3}$** tenemos que $p \in i$ y por ser inductivo, $p^+ \in i$. Pero,

Af$_2$. $p^+ = m$.

$\subseteq\Big]$ Por (*), $p \in m$. Por un lado, $\{p\} \subseteq m$. Y por otro lado, ya que $m \in \mathbb{N}$, m es transitivo así, $p \subseteq m$. Concretando, $p^+ = p \cup \{p\} \subseteq m$.

$\supseteq\Big]$ Veamos que $m \subseteq p \cup \{p\}$. Pero esto es inmediato de (**).

Esta última afirmación contradice el hecho de que $m \notin i$. Concluimos que no puede haber tales conjuntos n e i y por tanto $\mathbb{N} \subseteq \omega$. †

Con esto, concluimos con el resultado más importante de la sección:

Corolario$_5$.

1. $\mathbb{N} \in V$. (Por **ZF$_6$**)
2. $\mathbb{N}$ es un conjunto transitivo. (Por **Prop$_2$**)
3. $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo. (Por **Prop$_3$**)
4. $\omega \subseteq \mathbb{N}$. (Por **3** y propiedades de la $\bigcap$)
5. $\mathbb{N} = \omega$.
6. ω es el $\subseteq$–menor conjunto inductivo. (Por **5**, **3** y definición de ω).