Inducción para ω.

Puesto que ω es el $\subseteq$–menor conjunto inductivo, tenemos el

Principio de Indución para ω

Cualquiera de los siguientes enunciados, equivalentes entre sí, son formulaciones del Principio de Indución para los números naturales.

1. Si i es inductivo, entonces $\omega \subseteq i$.

2. Si i es un conjunto tal que:

I. $0 \in i$, y

II. $\forall x \left[\ x \in i \rightarrow x^{+} \in i\ \right]$,

entonces $\forall x \in \omega\, [x \in i]$.

3. Si $a \subseteq \omega$ es tal que:

I. $0 \in a$, y

II. $\forall x \left[\ x \in a \rightarrow x^{+} \in a\ \right]$,

entonces $a = \omega$.

A los incisos **I** se les conoce con el nombre de *Base de la Inducción* y a los incisos **II** con el de, *Paso Inductivo.* Al antecedente de la implicación, en **II**, se le llama *Hipótesis Inductiva.*

Podemos dar una forma más general –para clases– para este principio. Son, trivialmente, equivalentes los siguientes enunciados,

A. Si I es una clase inductiva, entonces $\omega \subseteq I$.

B. Si I es una clase tal que:

I. $0 \in I$, y

II. $\forall x \Big[x \in I \rightarrow x^{+} \in I \Big]$,

entonces $\forall x \in \omega\, [x \in I]$.

C. Si φ es una fórmula conjuntista tal, que:

I. $\varphi(0)$, y

II. $\forall x \Big[\varphi(x) \rightarrow \varphi(x^{+}) \Big]$.

entonces $\forall x \in \omega\ \varphi(x)$.

Solo nos hace falta justificar **A**, pero para ello basta ver que

$$i = \left\{x \ / \ x \in \omega \ \& \ x \in I\right\} = \omega \cap I$$

es un conjunto inductivo.

Necesitaremos las siguientes propiedades de los naturales y dejamos su prueba al lector.

Proposición$_6$. La funcional sucesor es monótona para los naturales:

$$\forall x \in \omega \ \forall y \in \omega \left[x \in y \ \rightarrow \ x^+ \in y^+\right]$$

Proposición$_7$. $\forall x \in \omega \left[x = 0 \ \vee \ 0 \in x\right]$.

Un orden para ω.

Pasemos ahora a analizar el orden entre los naturales. Nuestro candidato para ordenarlos es, obviamente, la relacional de pertenencia: $\in$.

Sabemos que la $\in_\omega$ es irreflexiva sobre ω, también, puesto que ω es un conjunto de conjuntos transitivos, la $\in_\omega$ es transitiva sobre ω. Hasta ahora tenemos que la $\in$ ordena parcialmente, en forma estricta, a ω. Para ser un orden total o lineal, nos hace falta ver que cualesquiera dos naturales son comparables, es decir, falta la tricotomía.

$$\forall x \in \omega \forall y \in \omega \left[(x \in y) \lor (x = y) \lor (y \in x) \right]$$

Consideremos:

$$\varphi(n) \rightleftharpoons \forall m \in \omega \left[(n \in m) \lor (n = m) \lor (m \in n) \right]$$

Probaremos por inducción que $\forall n \in \omega,\ \varphi(n)$.

$\varphi(0)\Big]$ P.D. $\forall m \in \omega\ [(0 \in m) \lor (m = 0) \lor (m \in 0)]$ lo cual es la **Proposición$_7$**.

$\forall n \in \omega\ [\varphi(n) \to \varphi(n^+)]\Big]$ Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente que $\varphi(n)$. Demostremos que $\varphi(n^+)$, es decir,

$$\forall m \in \omega \left[(n^+ \in m) \lor (n^+ = m) \lor (m \in n^+) \right]$$

sea pues, $m \in \omega$. Por **HI** tenemos tres casos.

$n \in m\Big]$ Por la **Proposición$_6$**, tenemos $n^+ \in m^+ = m \cup \{m\}$. Así, $n^+ \in m$ o $n^+ = m$.

$n = m\Big]$ Por ser funcional la sucesor, $n^+ = m^+$ y como $m \in m^+$, tenemos $m \in n^+$.

$m \in n\Big]$ Tenemos que $m \in n$ y también que $n \in n^+$, por tanto $m \in n^+$.

En cualquier caso, tenemos lo que queríamos. †

Y como es de esperarse, también la $\in$ bien ordena a los naturales: Nos faltaría ver que:

$$\forall x \left[\emptyset \neq x \subseteq \omega \to x \text{ tiene un } \in_\omega \text{–mínimo} \right]$$

Sea pues $\emptyset \neq b \subseteq \omega$. Hay un $m \in b$. Fijémonos en el natural m^+ y sea $c = m^+ \cap b$. Así, $\emptyset \neq c \subseteq m^+ \in \omega$. Por lo que c tiene un $\in_{m^+}$ –mínimo, digamos n, que cumple con:

1). $n \in c$. Y

2). $\forall w \in m^+ \left[w \in c \to (n \in w) \lor (n = w) \right]$.

Veamos que n es también, el $\in_\omega$ –mínimo de b. Pues,

a). $n \in b$. Por **1**) y de que $c \subseteq b$.

b). $\forall u \in \omega \left[u \in b \to (n \in u) \vee (n = u) \right]$. Sea $p \in b$. Comparemos a p y a n en el orden de ω. Si fuera el caso de que $p \in n$, como $n \in m^+ \in \omega$, tenemos que $p \in m^+$ y finalmente, tendríamos que $p \in c$, lo cual contradiría a **2**). Concretando, $p \notin n$. Finalmente, gracias la tricotomía de $\in_\omega$, tenemos que $n \in p$ o que $n = p$.

Resumimos todo esto en la siguiente,

Proposición₈. $\langle \omega, \in_\omega \rangle \in COBO$ estricto.

Entre números naturales la relación entre la $\in$ y la $\subseteq$ es muy estrecha, de hecho:

Proposición₉. $\forall n, m \in \omega \left[n \in m \leftrightarrow n \subsetneq m \right]$.

Prueba: Sean $n, m \in \omega$.

$\Rightarrow$] Supongamos que $n \in m$. Por ser m transitivo, $n \subseteq m$; pero es imposible que $n = m$, por tanto $n \subsetneq m$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $n \subsetneq m$. Como la $\in$ es tricotómica sobre ω, tenemos que $n \in m$ o $n = m$ o que $m \in n$. El segundo caso, contradice el hecho de que $n \subsetneq m$ y en el último caso, tendríamos que $m \in n \subseteq m$, lo cual también es contradictorio. †

Ahora, como es natural, damos una notación particular, para el orden de los naturales.

Notación: Para $n,\ m \in \omega$ escribiremos

$$n < m \quad \leftrightharpoons \quad n \in m \quad \leftrightharpoons \quad n \subsetneq m$$

Y siendo consistentes con esto, también pondremos

$$n \leq m \quad \leftrightharpoons \quad n \subseteq m \quad \leftrightharpoons \quad n \underline{\in} m$$

Terminamos esta sección, enunciando algunas propiedades y dejando sus pruebas al lector.

Proposición₁₀. $\forall x \in \omega \left[x = 0 \vee \exists y \in \omega\, (y^+ = x) \right]$

Proposición₁₁. **a**) $\omega \neq 0$.

b) $\neg \exists x (x^+ = \omega)$

Proposición₁₂. En los naturales la funcional sucesor, es la sucesor inmediato.

$$\forall x \in \omega\, \neg \exists y \left[x \in y \ \&\ y \in x^+ \right]$$

Proposición₁₃. Entre naturales, la funcional sucesor es inyectiva.

$$\forall x \in \omega\, \forall y \in \omega \left[x \neq y \to x^+ \neq y^+ \right]$$