RECURSIÓN para ω

La primera versión que daremos será trabajando con los axiomas que tenemos hasta ahora (**Z** $^-$) y será un Esquema de Teorema e.d. será enunciado para clases; más adelante daremos otras versiones –unas como casos particulares– para conjuntos, así como también motivaremos la necesidad de aumentar con un axioma más nuestra teoría, con el fin de garantizar que ciertas clases de conjuntos sean conjuntos.

Esquema de Recursión para ω

(en Z $^-$)

Si A es una clase, $a \in A$ y $G : A \to A$ entonces hay una única funcional F tal que

$$F : \omega \to A$$

I) $F(0) = a$

II) $\forall n \in \omega\Big[F(n^+) = G(F(n))\Big]$

Prueba. Esta la dividiremos en dos partes, la parte de la existencia y la correspondiente a la unicidad.

$\exists\,\big]$ Empezamos dando una,

Definición. Sea $f \in V$. Diremos que f es *Adecuada* syss hay un $n \in \omega$ tal que

$$f : n^+ \to A$$

i) $f(0) = a$

ii) $\forall m \in n\Big[f(m^+) = G(f(m))\Big]$

Sea $\mathcal{A} = \Big\{f \;/\; f \text{ es adecuada}\Big\}$. Con esto tenemos :

1) $\mathcal{A}$ es un sistema compatible de funciones.

2) $\forall n \in \omega \exists f \in \mathcal{A}\,[DOM(f) = n^+]$.

Si $F = \bigcup \mathcal{A}$, entonces F es la buscada, pues:

3) $F : \omega \to A$ y F cumple con **I**) y **II**).

Prueba de 1). Basta ver que cualesquiera dos funciones adecuadas son compatibles. Sean $f_1,\, f_2 \in \mathcal{A}$ y

$$\varphi(n) \rightleftharpoons \Big[n \in DOM(f_1) \cap DOM(f_2) \;\rightarrow\; f_1(n) = f_2(n)\Big]$$

Probaremos por inducción que $\forall n \in \omega[\varphi(n)]$.

$\varphi(0)\Big]$

Como $f_1,\, f_2 \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$0 \in DOM(f_1) \cap DOM(f_2) \quad \text{y} \quad f_1(0) = a = f_2(0)$$

$\forall n \in \omega[\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]\Big]$

Sea $n_0 \in \omega.$ Supongamos, inductivamente, que $\varphi(n_0)$ y demostremos que $\varphi(n_0^+)$. Sea pues, $n_0^+ \in DOM(f_1) \cap DOM(f_2)$. Puesto que $n_0 \in n_0^+$ y también de que $n_0^+ \in DOM(f_1)$ y $DOM(f_1) \in \omega,$ concluimos que $n_0 \in DOM(f_1);$ análogamente $n_0 \in DOM(f_2).$ De esto y de la **H.I.**, obtenemos que $f_1(n_0) = f_2(n_0).$ Finalmente, debido a **ii**) y a que G es funcional,

$$f_1(n_0^+) = G(f_1(n_0)) = G(f_2(n_0)) = f_2(n_0^+)$$

Prueba de 2). Sea

$$\psi(n) \rightleftharpoons \exists f \in \mathcal{A}\Big[\; n^+ \;=\; DOM(f) \;\Big]$$

Probaremos por inducción que $\forall n \in \omega[\psi(n)]$.

$\psi(0)\Big]$

Sea $f = \big\{\big\langle 0,\, a\big\rangle\big\}.$ Puesto que $a \in A,$ tenemos que $f : 0^+ \rightarrow A$ la cual cumple con **i**) y por vacuidad con **ii**). Así, $f \in \mathcal{A}$.

$\forall n \in \omega[\psi(n) \rightarrow \psi(n^+)]\Big]$

Sea $n_0 \in \omega.$ Supongamos inductivamente que $\psi(n_0),$ demostremos que $\psi(n_0^+)$. Así, hay una $f : n_0^+ \rightarrow A$ que cumple con **i**) y **ii**).

Sea $g = \big\{\big\langle n_0^+,\, G(f(n_0))\big\rangle\big\}$, obsérvese que g es función; pues, como $n_0 \in n_0^+ = DOM(f),$ tenemos que $f(n_0) \in A = DOM(G)$ y, por tanto, $G(f(n_0))$ está bien definido.

Ahora bien, como $DOM(f) \cap DOM(g) = n_0^+ \cap \{n_0^+\} = \emptyset$ resulta que f y g son compatibles y por tanto $f^* = f \cup g$ es una función, veamos que es la buscada. Tenemos,

$$DOM(f^*) = DOM(f) \cup DOM(g) = n_0^+ \cup \{n_0^+\} = (n_0^+)^+ \text{ y}$$

$IMG(f^*) = IMG(f) \cup IMG(g) \subseteq A \cup A = A$

Veamos que f^* cumple con **i**) y **ii**):

i) Como $0 \in n_0^+ = DOM(f)$, tenemos que, $f^*(0) = f(0) = a$.

ii) Sea $m \in n_0^+$. Hay dos casos:

$m \in n_0 \,]$ Así, $m \in n_0 \in n_0^+ = DOM(f)$, por lo que

$$f^*(m^+) = f(m^+) = G(f(m)) = G(f^*(m))$$

$m \in \{n_0\} \,]$ Así, $m = n_0 \in DOM(g)$ y por tanto:

$$f^*(m^+) = f^*(n_0^+) = g(n_0^+) = G(f(n_0)) = G(f^*(n_0)) = G(f^*(m))$$

Con lo que concluimos que $\psi(n_0^+)$.

Prueba de 3). Por **1**) tenemos que $\mathcal{A}$ forma un sistema compatible de funciones, por lo que $F = \bigcup \mathcal{A}$ es una funcional. De la definición de función adecuada y de **2**), tenemos

$$DOM(F) = DOM\left(\bigcup \mathcal{A}\right) = \bigcup_{f \in \mathcal{A}} DOM(f) = \omega$$

$$IMG(F) = IMG\left(\bigcup \mathcal{A}\right) = \bigcup_{f \in \mathcal{A}} IMG(f) \subseteq A$$

Veamos ahora que F cumple con **I**) y **II**).

I) $F(0) = f(0) = a$ donde f es cualquier función adecuada, e.d. $f \in \mathcal{A}$ y f es arbitraria. (Obsérvese que usamos el hecho de que $\mathcal{A} \neq \emptyset$).

II) $\forall n \in \omega[F(n^+) = G(F(n))]$

Sea pues $n_0 \in \omega$. Por **2**), hay una $f : (n_0^+)^+ \to A$ la cual cumple con **i**) y **ii**). Así,

$F(n_0^+)$	$=$	$f(n_0^+)$	$n_0^+ \in (n_0^+)^+ = DOM(f)$
	$=$	$G(f(n_0))$	por **ii**) para f
	$=$	$G(F(n_0))$	por def. de F, $F(n_0) = f(n_0)$ y G es funcional

$!\,]$ Sean $F_1 : \omega \to A$ y $F_2 : \omega \to A$ que cumplen **I**) y **II**) respectivamente. Para probar que $F_1 = F_2$, basta ver que $\forall n \in \omega[F_1(n) = F_2(n)]$. Sea

$$\chi(n) \rightleftharpoons [F_1(n) = F_2(n)]$$

Probaremos por inducción que $\forall n \in \omega[\chi(n)]$.

$\chi(0)\Big]$ Por **I**), tenemos que $F_1(0) = a = F_2(0)$.

$\forall n \in \omega[\chi(n) \rightarrow \chi(n^+)]\Big]$ Sea $n_0 \in \omega$ y supongamos inductivamente que $\chi(n_0)$.
Así,

$$
\begin{aligned}
F_1(n_0^+) &= G(F_1(n_0)) && \text{por } \mathbf{II}) \text{ para } F_1 \\
&= G(F_2(n_0)) && \text{por } \chi(n_0) \text{ y } G \text{ es funcional} \\
&= F_2(n_0^+) && \text{por } \mathbf{II}) \text{ para } F_2
\end{aligned}
$$

†

La funciónal F, cuya existencia y unicidad quedó probada por el Esquema de Recursión para ω, se dice que queda *definida recursivamente por las clausulas* **I**) y **II**). A la primera clausula se le llama *Base de la Recursión,* y a la segunda el *Paso Recursivo.*

NOTA para escépticos: La prueba anterior nos da una definición explícita de F :

$$
\begin{aligned}
& F(x) = y \\
\leftrightarrow\ & \exists f\,[f \in \mathcal{A}\ \&\ x \in DOM(f)\ \&\ f(x) = y] \\
\leftrightarrow\ & \exists f \left[\begin{array}{l} f \in FUNC\ \& \\ \exists n \in \omega\Big[DOM(f) = n^+\ \&\ f(o) = a\ \&\ \forall m \in n\Big[f(m^+) = G(f(m))\Big]\ \&\ x \in n\Big]\ \& \\ \hfill f(x) = y \end{array} \right]
\end{aligned}
$$

TAREA:

1. Prueba nuevamente **1**), haciendo ver que

$$\left\{n \in \omega \ / \ n \in DOM(f_1) \cap DOM(f_2) \ \& \ f_1(n) \neq f_2(n)\right\} = \emptyset$$

2. Dá otra prueba de **2**), probando que

$$\left\{n \in \omega \ / \ \neg\exists f \in \mathcal{A}\,[n^+ = DOM(f)]\right\} = \emptyset$$

3. Dá otra prueba de la unicidad, probando que

$$\left\{n \in \omega \ / \ F_1(n) = F_2(n)\right\} = \emptyset$$