Notas a Recursión

Recordar que estamos trabajando en $\mathbf{Z}^{-} = \{ \mathbf{ZF}_1, \ldots, \mathbf{ZF}_5 \} \cup \mathbf{ZF}_6 \cup \{ \mathbf{ZF}_7 \}$

El **Esquema de Recursión para** ω (en $\mathbf{Z}^{-}$) a la letra dice:

Si A es una clase, $a \in A$ y $G : A \rightarrow A$ entonces *hay* una *única* **funcional** F tal, que

$$F : \omega \rightarrow A$$

I) $F(0) = a$

II) $\forall n \in \omega \left[F(n^{+}) = G(F(n)) \right]$

Como se vió en la prueba , ésta solo nos garantiza la existencia de una *funcional*, F, **no** sabemos si es función, es decir **no** sabemos si es un conjunto; así como tampoco hay garantía de que la $IMG(F)$ sea un conjunto.

Por supuesto tenemos el caso particular en que si la clase A es un conjunto, o equivalentemente, que la funcional G sea una función, entonces son conjuntos tanto F (pues $F \subseteq \omega \times A \in V$) como la $IMG(F)$ (pues $IMG(F) \subseteq A \in V$) . En este caso (en $\mathbf{Z}^{-}$), el esquema toma la forma de un teorema y quedaría enunciado como sigue,

Teorema de Recursión para ω, en $\mathbf{Z}^{-}$.

Para toda función $g : b \rightarrow b$ y todo $a \in b$, *hay* una *única* **función** f tal, que

$$f : \omega \rightarrow b$$

I) $f(0) = a$

II) $\forall n \in \omega \left[f(n^{+}) = g(f(n)) \right]$

En general, tanto la funcional F , como la $IMG(F)$ no son conjuntos. Por ejemplo, consideremos el siguiente caso particular: Tomemos $A = V$, $a = \omega$ y $G = {}^{+}$, por el Esquema de Recusión para ω, tendríamos que hay una única *funcional* F_0 tal, que

$$F_0 : \omega \rightarrow V$$

I) $F_0(0) = \omega$

II) $\forall n \in \omega \left[F_0(n^{+}) = (F_0(n))^{+} \right]$

¿ La $IMG(F_0)$ es un conjunto ? Abusando un poco de la notación podríamos escribir,

$$IMG(F_0) = \{F_0(n) \ / \ n \in \omega\} = \{\omega, \omega^+, (\omega^+)^+, \ \ldots \ \}$$

Para poder *"ver"* que no necesariamente se tiene que $IMG(F_0) \in V$, recordemos los primeros pasos en la construcción de conjuntos en la Jerarquia Acumulativa; abusando nuevamente de la notación,

$$R_0 = \emptyset$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\Big[\ R_{n+1} = \wp(R_n) \ \Big]$$

$$R_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$$

Teniendo por lo pronto hasta aquí construido, podemos continuar construyendo un poco más usando el primer principio de construcción y quedaría de la siguiente manera,

$$\forall n \in \mathbb{N}\Big[R_{\omega+(n+1)} = \wp(R_{\omega+n})\Big]$$

para obtener finalmente a $R_{\omega+\omega} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} R_{\omega+n}$.

En $R_{\omega+\omega}$ se puede *"ver"* que $IMG(F_0)$ es una *Clase Propia*, puesto que nunca se terminó de construir. Es un buen ejercicio probar que $R_{\omega+\omega} \models$ **Z**$^-$ + **ABF**.

Concretando. Con los axiomas que tenemos hasta ahora **no se puede probar** que algunas clases –particulares, pero *importantes,* por lo sencillas y no conflictivas que parecen– sean conjuntos. Si queremos que nuestra teoría permita, o mejor dicho pruebe, la existencia de conjuntos similares a $IMG(F_0)$ tenemos que agregar algún principio adicional; este es,

ZF$_8$. Esquema Axiomático de Sustitución o Reemplazo.
(Fraenkel 1922, Skolem 1923, hay ideas anteriores en Cantor 1899)

La imagen de un conjunto a través de una funcional es un conjunto.

Si F es una funcional y b es un conjunto, entonces $F[b]$ también es un conjunto.

Formalmente,

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2\Big[\varphi(x,y_1) \ \& \ \varphi(x,y_2) \ \rightarrow \ y_1 = y_2\Big] \rightarrow \forall u \exists v \forall y\Big[y \in v \ \leftrightarrow \ \exists x(x \in u \ \& \ \varphi(x,y))\Big]$$

donde φ es una $\in$–fórmula en la cual la variable v no ocurre.

Notación.

$$\mathsf{ZF}^{-} = \mathsf{Z}^{-} + \mathsf{ZF}_8$$

Con este axioma tenemos, en el contexto de la discusión anterior, que tanto F como la $IMG(F)$, son conjuntos pues, por **ZF**$_8$, $IMG(F) = F[\omega] \in V$ y como $F \subseteq \omega \times IMG(F)$, por **ZF**$_6$, tendríamos que $F \in V$.

Podríamos enunciar el,

Esquema de Recursión para ω, en ZF^{-}.

Si A es una clase, $G : A \to A$ y $a \in A$, entonces *hay* una *única* **función** f tal, que

$$f : \omega \to A$$

I) $f(0) = a$

II) $\forall n \in \omega \left[f(n^{+}) = G(f(n)) \right]$