

VARIANTES A RECURSIÓN PARA ω

Hay muchas versiones o variantes de Recursión para ω (en \mathbf{ZF}^-), veamos algunas. Estas solamente las enunciaremos y daremos una sugerencia para su demostración.

a). Si A es una clase, $a \in A$ y $G_1 : A \times \omega \rightarrow A$, entonces hay una única **función** f_1 tal que

$$f_1 : \omega \rightarrow A$$

I) $f_1(0) = a$

II) $\forall n \in \omega [f_1(n^+) = G_1(f_1(n), n)]$

Observación:

$$f_1(0) = a \qquad f_1(2) = G_1(f_1(1), 1) = G_1(G_1(a, 0), 1)$$
$$f_1(1) = G_1(f_1(0), 0) = G_1(a, 0) \qquad f_1(3) = G_1(f_1(2), 2) = G_1(G_1(G_1(a, 0), 1), 2)$$

Para una prueba de **a)**, solo hay que rehacer la prueba original.

Ejemplo: El factorial de un natural:

$$! : \omega \rightarrow \omega$$

I) $0! = 1$

II) $n^+! = n! \cdot n^+$

En este caso: $A = \omega$, $a = 1$ y $G_1 : \omega \times \omega \rightarrow \omega$, con $G_1(p, q) = p \cdot q^+$ para toda $p, q \in \omega$.

b). Versión Paramétrica.

Si P es un conjunto, A una clase, $H : P \rightarrow A$ y $G_2 : P \times A \times \omega \rightarrow A$, entonces hay una **única función** f_2 tal que

$$f_2 : P \times \omega \rightarrow A$$

$$\text{I) } \forall p \in P \left[f_2(p, 0) = H(p) \right]$$

$$\text{II) } \forall p \in P \forall n \in \omega \left[f_2(p, n^+) = G_2(p, f_2(p, n), n) \right]$$

Para la prueba de **b)** se puede usar **I)**. *Sugerencia:* define por recursión $f_1 : \omega \rightarrow {}^P A$ como : $f_1(0) = H$ y $f_1(n^+) = G_1(f_1(n), n)$ donde $G_1 : {}^P A \times \omega \rightarrow {}^P A$ esta dada por $G_1(i, n)(p) = G_2(p, i(p), n)$. Finalmente $\forall p \in P \forall m \in \omega f_2(p, m) = f_1(m)(p)$.

Ejemplo: La Suma entre Naturales:

$$+ : \omega \times \omega \rightarrow \omega$$

$$\text{I) } \forall m \in \omega \left[m + 0 = m \right]$$

$$\text{II) } \forall m \in \omega \left[m + n^+ = (m + n)^+ \right]$$

En este caso: $P = \omega$, $A = \omega$, $H : \omega \rightarrow \omega$, con $H = Id_\omega$ y $G_2 : \omega \times \omega \times \omega \rightarrow \omega$, con $G_2(p, q, r) = q^+$ para todos $p, q, r \in \omega$.

c) Si a es un conjunto, denotamos el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de a por ${}^{\omega}a$; formalmente,

$${}^{\omega}a = \bigcup_{n \in \omega} ({}^n a)$$

Si a es un conjunto y $g : {}^{\omega}a \rightarrow a$, entonces hay una **única función** f_3 tal que

$$\begin{aligned} f_3 &: \omega \rightarrow a \\ \forall n \in \omega & \left[f_3(n) = g(f_3 \upharpoonright n) \right] \end{aligned}$$

Observación:

$$f_3(0) = g(f_3 \upharpoonright 0) = g(f_3 \upharpoonright \emptyset) = g(\emptyset) = g(0) \quad \text{y} \quad f_3(1) = g(f_3 \upharpoonright 1) = g(\langle \{0, g(0)\} \rangle)$$

Para la prueba de **c)** se puede usar **a)**. *Sugerencia:* Sea $G_1 : S \times \omega \rightarrow A$, $G_1(x, n) = x \cup \{(n, g(x))\}$, Por **a)**, hay $f_1 : \omega \rightarrow S$ tal que $f_1(0) = \emptyset$ y $f_1(n^+) = G_1(f_1(n), n)$. Finalmente, sea $f_3 = \cup f_1$.

Ejemplo: Para obtener la Sucesión de Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,..., basta tomar:

$a = \omega$ y $g : {}^{\omega}\omega \rightarrow \omega$, dada como sigue, para cada $t \in {}^{\omega}\omega$, sea

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{DOM}(t) = 0 \\ 1 & \text{si } \text{DOM}(t) = 1 \\ t(n) + t(n+1) & \text{si } \text{DOM}(t) = n+2 \text{ para algún } n \in \omega \end{cases}$$

por **c)** tendríamos que hay una **única** $F : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\forall n \in \omega [F(n) = g(F \upharpoonright n)]$. Así,

$$F(0) = g(0) = 1$$

$$F(1) = g(F \upharpoonright 1) = 1$$

$$F(2) = g(F \upharpoonright 2) = (F \upharpoonright 2)(0) + (F \upharpoonright 2)(1) = F(0) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(3) = g(F \upharpoonright 3) = (F \upharpoonright 3)(1) + (F \upharpoonright 3)(2) = F(1) + F(2) = 1 + 2 = 3$$

$$F(4) = F(2) + F(3) = 2 + 3 = 5$$

Podríamos decir, hay una **única función** $F : \omega \rightarrow \omega$ tal que

1. $F(0) = 1$ y $F(1) = 1$

2. $\forall n \in \omega F(n+2) = F(n) + F(n+1)$

d) Si A es un conjunto, $a \in A$ y g una función con $DOM(g) \subseteq A \times \omega$ e $IMG(g) \subseteq A$, entonces hay una **única función** f_4 tal que

$$0) \quad DOM(f_4) = \omega \text{ o } DOM(f_4) = k_0^+ \text{ donde } k_0 = \min \{k \in \omega \mid (f(k), k) \notin DOM(g)\}$$

$$00) \quad IMG(f_4) \subseteq A$$

$$I) \quad f_4(0) = a$$

$$II) \quad \forall n \left[n^+ \in DOM(f_4) \rightarrow \left[f_4(n^+) = g(f_4(n), n) \right] \right]$$

Para la prueba de d) se puede usar a). *Sugerencia:* Sea $A^* = A \cup \{a^*\}$ donde $a^* \notin A$. Define $g^* : A^* \times \omega \rightarrow A^*$ como sigue:

$$g^*(x, n) = \begin{cases} g(x, n) & \text{si } (x, n) \in DOM(g) \\ a^* & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con a) obtendrás f^* . Si $f^*(i) = a^*$ para algún $i \in \omega$, considera $f^* \upharpoonright i$ para el menor de tales i .

Aplicación.

Si $X \subseteq \omega$, entonces hay una función inyectiva f con $IMG(f) = X$ y tal que $DOM(f) = \omega$ o $DOM(f) \in \omega$.

Prueba: TAREA.

†