# CONJUNTOS FINITOS

**Definición**. **CANTOR**
(En 1872 acepta el *Infinito (Actual)* de *Facto*, en contra de la idea que el *Infinito* es en *Potencia)*.

$a$ es *Finito* syss $\exists n \in \omega[n \sim a]$.

$a$ es *Infinito* syss $a$ **no** es finito.

**Notación**:

1). $FIN = \left\{x \ / \ x \text{ es finito}\right\}$.

2). $INF = \left\{x \ / \ x \text{ es infinito}\right\}$.

**Observaciones**:

1). $\forall n \in \omega,\ n \in FIN.$
2). Si $a \in FIN$ y $b \sim a$ entonces $b \in FIN.$
3). $a \sim 0$ syss $a = \emptyset$. Y $\emptyset \in FIN.$

**Proposición₁**. (**Lema de Finitud**). Ningún natural es equipotente con un subconjunto propio. En símbolos:

$$\forall n \in \omega\, \neg\exists x\left[x \subsetneq n \ \ \& \ \ x \sim n\right]$$

**Prueba**. Sea $\varphi(n) \rightleftharpoons \neg\exists x[x \subsetneq n \sim n]$. Probaremos por inducción para $\omega$ que, $\forall n \in \omega\, \varphi(n)$.

$\varphi(0)\,\big]$ Trivialmente es cierto que $\neg\exists x\left[x \subsetneq 0 \ \ \& \ \ x \sim 0\right]$.

$\forall n \in \omega\ [\varphi(n) \to \varphi(n^+)]\,\big]$ Sea $n \in \omega.$ Supongamos $\neg\varphi(n^+)$ y demostremos $\neg\varphi(n)$. Supongamos pues que, $a \subsetneq n^+$ para el cual $n^+ \sim_f a.$ Tenemos dos casos.

$n \notin a\,\big]$ Así, resulta que $a \subseteq n$ y $f(n) \in a \setminus \{n\}.$ Con esto, $a \setminus \{f(n)\} \subsetneq n.$ Ahora bien, sea $g = f \setminus \{\langle n, f(n)\rangle\}.$ Con lo que tenemos que $n \sim_g a \setminus \{f(n)\}.$

$n \in a\,\big]$ En este caso $a \setminus \{n\} \subsetneq n$ y hay un $k \in n^+$ tal que $f(k) = n.$ Así, $n \sim_g a \setminus \{n\}$, donde

$$g = \begin{cases} f \setminus \left\{\left\langle n,\ n\right\rangle\right\} & \text{Si } k = n \\ \text{o} & \\ \left(f \setminus \left\{\left\langle n, f(n)\right\rangle\ ,\ \left\langle k,\ n\right\rangle\right\}\right) \cup \left\{\ \left\langle k, f(n)\right\rangle\ \right\} & \text{Si } k \in n \end{cases}$$

En cualquier caso tenemos que $\neg\varphi(n)$. †

**Corolario**$_2$.

**1**). Ningún conjunto finito es equipotente a un subconjunto propio,

$$\forall x \left[ x \in FIN \rightarrow \neg\exists y [y \subsetneq x \ \&\ y \sim x] \right]$$

**2**). Cualquier conjunto equipotente a un subconjunto propio es infinito,

$$\forall x \left[ \exists y [y \subsetneq x \ \&\ y \sim x] \rightarrow x \in INF \right]$$

**3**). $\omega \in INF$. (De hecho, como se verá, es el 1$^{er}$ ordinal y cardinal infinito)

**4**). $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \in INF$.

**Definición**. (**DEDEKIND**, **R**. (1831-1916) En 1888)

$a$ es *D-Infinito* syss $\exists y \left[ y \subsetneq a \ \&\ y \sim a \right]$

$a$ es *D-Finito* syss $a$ **no** es D-Infinito

syss $\forall y \left[ y \subseteq a \ \&\ y \sim a \rightarrow y = a \right]$

**Observación**: $\omega$ es D-infinito.

**Corolario**$_3$.

1) Si $a$ es finito, entonces $a$ es D-finito.
2) Si $a$ es D-infinito, entonces $a$ es infinito.

¿Qué puede decir de la conversa de esta proposición?
(**R**: Depende del **AE**)

Veamos dos consecuencias del Lema de Finitud.

**Corolario**$_4$. Si $n, m \in \omega$, entonces

**1**) **a**) $n \neq m \rightarrow n \nsim m$

**b**) $n \sim m \rightarrow n = m$

**2**) Si $a \sim n$ y $a \sim m$ entonces $n = m$

Con este resultado podríamos dar una definición parcial de cardinalidad: Si $a \in FIN$, entonces el cardinal de $a$ es el único natural con el cual es equipotente; en notación quedaría así:

$$|\ | : FIN \rightarrow \omega$$

$$\forall a \in FIN,\ \left| a \right| = \bigcap \left\{ n \in \omega \ / \ n \sim a \right\}$$

Sin embargo, prescindiremos de esta definición y de la notación por el momento.

**Corolario$_5$**. (**Principio del palomar para finitos**). Sea $n \in \omega$. Si $n$ objetos son colocados en menos de $n$ casillas, entonces habrá una casilla con más de un objeto.

Pasemos ahora a dar propiedades de los conjuntos finitos

**Proposición$_6$**. Si $a \in FIN$, entonces $a \cup \{b\} \in FIN$.
De hecho,

$$\forall a \forall n \in \omega \forall p \Big[ a \sim n \ \& \ p \notin a \ \rightarrow \ (a \cup \{p\}) \sim n^+ \Big]$$

**Proposición$_7$**. Al quitarle a un finito uno de sus elementos, sigue siendo finito.
De hecho:

$$\forall a \forall n \in \omega \forall p \Big[ a \sim n^+ \ \& \ p \in a \ \rightarrow \ (a \setminus \{p\}) \sim n \Big]$$

**Prueba**: Supongamos que $a \sim_f n^+$. Definimos $g : (a \setminus \{p\}) \rightarrow n$, como sigue:

$$\text{para } x \in (a \setminus \{p\}),\ g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \neq n \\ \\ f(p) & \text{si } f(x) = n \end{cases}$$

Así, $(a \setminus \{p\}) \sim_g n$. †

**Proposición$_8$**.

**1**). Los subconjuntos de un número natutal son finitos.

**2**). Los subconjuntos de un conjunto finito son finitos.

**Prueba 1**): Sea

$$\varphi(n) \leftrightharpoons \forall x \Big( x \subseteq n \ \rightarrow \ x \in FIN \Big)$$

Probaremos por inducción: $\forall n \in \omega, \varphi(n)$.

$\varphi(0)$ ] $\forall x (x \subseteq 0 \rightarrow x \in FIN)$ es obviamente cierto.

$\forall n \in \omega\ [\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]$ ] Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente que $\varphi(n)$. Sea $b \subseteq n^+$. Tenemos dos casos: Si $n \notin b$, entonces $b \subseteq n$ y por la **HI** tenemos que $b \in FIN$. Ahora veamos cuando $n \in b$; aquí $\big( b \setminus \{n\} \big) \subseteq n$ y nuevamente por la **HI**, $\big( b \setminus \{n\} \big) \in FIN$. Finalmente, como $b = \big( b \setminus \{n\} \big) \cup \{n\}$, por la **Proposición$_6$**, tenemos que $b \in FIN$.

La prueba de **2**) se sigue de **1**). †

Otra forma de probar la proposición anterior es demostrando **2**) (ya que **1**). es un caso particular) y esta se puede hacer por inducción sobre la "cardinalidad del conjunto":

$$\forall n \in \omega\, \forall x \left[ x \sim n \;\rightarrow\; \forall y \big( y \subseteq x \rightarrow y \in FIN \big) \right]$$

dejamos al lector, dicha prueba.

**Corolario₉**.
**a**). Si $a \in FIN$ entonces $a \setminus b \in FIN$.
**b**). Si $a \in FIN$ entonces $a \cap b \in FIN$.

**Proposición$_{10}$**. La unión de dos conjuntos finitos es finita.
**Prueba**. Por inducción sobre la cardinalidad de uno de ellos:
Supongamos que $a \in FIN$ y sea

$$\varphi(n) \leftrightharpoons \forall x \left[ x \sim n \;\rightarrow\; a \cup x \in FIN \right]$$

probemos que $\forall n \in \omega\, \varphi(n)$.
$\varphi(0)\,\big]$ Si $b \sim 0$, entonces $b = \emptyset$ y de aquí que $a \cup b = a \cup \emptyset = a \in FIN$.
$\forall n \in \omega\, [\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]\,\big]$ Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente $\varphi(n)$. Sean $b,f$ y $p$ tales que $b \sim_f n^+$ y $p = f^{-1}(n) \in b$. Así, por la **Proposición$_7$**, $(b \setminus \{p\}) \sim n$. Ahora de la **HI**,$a \cup (b \setminus \{p\}) \in FIN$, pero entonces, por la **Proposición$_6$**,
$a \cup b = [a \cup (b \setminus \{p\})] \cup \{p\} \in FIN$. †

**Proposición$_{11}$**. La unión finita (e.d. la unión de un conjunto finito) de conjuntos finitos es finita.
**Prueba**. Por inducción sobre la cardinalidad del conjunto:
Sea $\varphi$ la fórmula:

$$\varphi(n) \leftrightharpoons \forall x \left[ (n \sim x) \;\&\; \forall y \in x\, (y \in FIN) \;\rightarrow\; \bigcup x \in FIN \right]$$

probemos que $\forall n \in \omega\, \varphi(n)$.
$\varphi(0)\,\big]$ Si $a \sim 0$, entonces $a = \emptyset$ y de aquí que $\bigcup a = \bigcup \emptyset = \emptyset \in FIN$.
$\forall n \in \omega\, [\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]\,\big]$ Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente $\varphi(n)$. También supongamos que $a$ y $f$ son tales que $(n^+ \sim_f a)$ y $\forall y \in a\, (y \in FIN)$. Así $f(n) \in a$ y por tanto, gracias a la **Proposición$_7$**, $\big( a \setminus \{f(n)\} \big) \sim n$. De la **HI** tenemos que $\bigcup(a \setminus \{f(n)\}) \in FIN$. Ahora bien, puesto que $f(n) \in a$, tenemos que $f(n) \in FIN$ y de aqui que, por la proposición anterior, $\bigcup a = \big( \bigcup(a \setminus \{f(n)\}) \big) \cup f(n) \in FIN$. †

**Proposición$_{12}$**.
1. El producto cartesiano de conjuntos finitos es finito.

**2**. Si $a \sim n$ y $b \sim m$, con $n, m \in \omega$, entonces $a \times b \sim n \cdot m$

**Prueba de 1**. Por un lado, tomando en cuenta que

$$a \times b = \bigcup \left\{ a \times \{z\} \ / \ z \in b \right\}$$

y por otro, que $a \times \{z\} \sim a$ y que $\left\{ a \times \{z\} \ / \ z \in b \right\} \sim b$, tenemos que, si $a$ y $b$ son finitos, entonces $a \times b$ resulta ser la unión finita de conjuntos finitos y por consiguiente, finito. †

**Proposición**$_{13}$.

**1**. Si $a, b \in FIN$ entonces ${}^{a}b \in FIN$.

**2**. Si $n, m \in \omega$ son tales que $a \sim n$ y $b \sim m$, entonces ${}^{a}b \sim m^{n}$.

**Prueba**: **TAREA**.

**Proposición**$_{14}$.

**1**. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto finito es finito.

**2**. Si $n \in \omega$ es tal que $a \sim n$, entonces $\wp(a) \sim 2^{n}$.

**Prueba**: Es inmediata de la proposición anterior y del teorema de Cantor.
$\wp(a) \sim {}^{a}2 \sim 2^{n}$. †

**Proposición**$_{15}$. La imagen de un conjunto finito, a través de una función, es finita.
**Prueba**: Sean $f \in FNC$ y $a \in FIN$. P.D. $f[a] \in FIN$. Puesto que:

$$f[a] = \left\{ f(x) \ / \ x \in a \right\} = \bigcup \left\{ \left\{ f(x) \right\} \ / \ x \in a \right\}$$

resulta que $f[a]$ es la unión finita de conjuntos finitos y por tanto finito. †

Otra demostración podría ser por inducción sobre la cardinalidad del dominio: Si $f \in FUN$, entonces

$$\forall n \in \omega \left[ DOM(f) \sim n \ \rightarrow \ IMG(f) \in FIN \right]$$