CONJUNTOS INFINITOS

Recordemos:

- $a \in FIN$ syss $\exists n \in \omega[n \sim a]$
- $a \in INF$ syss a **no** es finito syss $\forall n \in \omega[n \nsim a]$

Algunas observaciones:

1. Si $a \in INF$ y $b \in FIN$, entonces $a \setminus b \in INF$.
2. $\forall n \in \omega$, $n \in FIN$ y $\omega \in INF$.
3. $\forall n \in \omega$, $n \prec \omega$ y por tanto, si $a \in FIN$, entonces $a \prec \omega$
4. Si $\omega \precsim a$, entonces $a \in INF$.

Quisieramos tener que ω es, dentro de los infinitos, el "más chico" –salvo equipotencia. Pero esto no es demostrable en nuestra teoría (en **ZF⁻**; se necesita **AE**).

Pasemos ahora a comparar algunos conjuntos con ω.

Definición.

1) a es *Numerable* syss $a \sim \omega$
2) a es *Contable* syss $a \precsim \omega$

Hay que advertir que el significado de estos términos varía de autor en autor.

Es obvio que, los conjuntos numerables son infinitos y no todos los infinitos son numerables (p.e. $\mathbb{R}$). También es claro que los finitos o numerables, estando dominados por ω, son contables. Pero ya no lo es tanto el hecho de que los contables sean finitos o numerables; esto habrá que probarlo. Antes veamos la siguiente,

Proposición₁. Un subconjunto infinito de un numerable es numerable.

$$\forall x,y\Big[y \subseteq x \ \&\ y \in INF \ \&\ x \text{ numerable } \rightarrow\ y \text{ numerable}\Big]$$

1a. **Prueba**. Se sigue de un resultado ya probado. Si $y \subseteq \omega$, entonces hay una función inyectiva f con $IMG(f) = y$ y tal que $DOM(f) = \omega$ o $DOM(f) \in \omega$.

2a. **Prueba**. Sean a,b y g tales que $b \subseteq a$, $b \in INF$ y $\omega \sim_g a$. P.D. $\omega \sim b$. Para ello, utilizaremos el Teorema de **C**-**S**-**B**.

$b \preceq \omega$ $\Big]$ Puesto que $b \subseteq a$ tenemos, $b \preceq a$ y como $a \sim \omega$, por la transitividad de la dominancia, se tiene lo que se quería. (Obsérvese que este resultado se puede releer como, cualquier subconjunto de un numerable, es contable.)

$\omega \preceq b$] Utilizando una de las versiones del Teorema de Recursión para ω, (ver nota al final) obtenemos que hay una (única) función f, la cual trabaja como sigue,

$$f : \omega \to b$$
$$\forall n \in \omega \quad f(n) = g\Big(\bigcap\big\{m \in \omega \ / \ g(m) \in b \setminus f[n]\big\}\Big)$$

Observemos que f tiene la propiedad de que para todo $n \in \omega$, $f(n) \notin f[n]$. Pues si $n \in \omega$, por definición de f, tenemos que $f(n) = g(m)$ para algún $m \in \omega$, con tal de que $g(m) \in b \setminus f[n]$, es decir $f(n) = g(m) \notin f[n]$.
Con esto veamos que f es inyectiva. Supongamos que $n_1, n_2 \in \omega$ tales que $n_1 \neq n_2$; s.p.g., $n_1 < n_2$, así, por definición, $f(n_1) \in f[n_2]$, pero $f(n_2) \notin f[n_2]$, por tanto $f(n_1) \neq f(n_2)$. †

Corolario$_2$. a es contable syss a es finito o numerable.
Prueba: Supongamos que $a \preceq \omega$, así hay una $f : a \to \omega$ inyectiva. Por lo que tenemos: $a \sim f[a]$ con $f[a] \subseteq \omega$. Tenemos dos casos: si $f[a] \in FIN$, entonces $a \in FIN$ y si $f[a] \notin FIN$, por la proposición anterior, $a \sim \omega$. El "regreso" del bicondicional lo discutimos anteriormente. †

El siguiente resultado depende del **AE** y sólamente lo enunciamos:

Proposición(AE). Todo conjunto infinito, contiene un subconjunto numerable.
o equivalentemente,

Si $a \in INF$, entonces $\omega \preceq a$

Proposición$_3$. La imagen de un numerable, a través de una función, es contable.
Prueba: S.p.g. podemos suponer que partimos de una función f, con dominio ω. Veamos que $f[\omega] \preceq \omega$. Definimos,

$$g : f[\omega] \to \omega$$
$$\forall x \in f[\omega], \quad g(x) = \bigcap\big\{m \in \omega \ / \ f(m) = x\big\}$$

g es inyectiva, pues: si $x,y \in f[\omega]$, con $x \neq y$, entonces, por ser f función,

$$\big\{m \in \omega \ / \ f(m) = x\big\} \cap \big\{m \in \omega \ / \ f(m) = y\big\} = \emptyset$$

con lo que tenemos que $g(x) \neq g(y)$. †

Como un caso particular, tenemos que la imagen de una ω–sucesión es finita o numerable.

Proposición$_4$. La unión de dos conjuntos numerables es numerable.
Prueba: Sean a,b,f y g tales que $\omega \sim_f a$ y $\omega \sim_g b$. Definimos,

$$h : \omega \to a \cup b$$

$$\forall m \in \omega,\ h(m) = \begin{cases} f(n) & \text{si} \quad m = 2n \quad \text{p.a. } n \in \omega \\ & \\ g(n) & \text{si} \quad m = 2n+1 \quad \text{p.a. } n \in \omega \end{cases}$$

Observemos que h no necesariamente es inyectiva. Lo que tenemos es que $h[\omega] = a \cup b$ y debido a la proposición anterior, $a \cup b \preceq \omega$, con lo que apenas obtenemos que $a \cup b$ es contable. Pero, como $a \cup b \in INF$, por el **Corolario₂**, tenemos que $a \cup b \sim \omega$. †

Corolario₅. La unión finita de conjuntos numerables es numerable.
Prueba: Por inducción sobre el número de uniendos. †

Terminamos esta sección, mencionando otro resultado más, que depende del **AE**.

Proposición(**AE**). La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

NOTA:

Aquí vamos a justificar la existencia de la función f, usada en la prueba de la **Proposición$_1$**. Antes, recordemos:

1. Si $n \in \omega$, ${}^{n}a = \left\{ s \ / \ s : n \to a \right\}$

(${}^{n}a$ es el conjunto de todas las sucesiones de longitud n de elementos de a).

2. ${}^{\underset{\smile}{\omega}}a = \bigcup_{n \in \omega} ({}^{n}a)$

(${}^{\underset{\smile}{\omega}}a$ es el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de a).

La versión **C** del Teorema de Recursión dice:

Si a es un conjunto y $G : {}^{\underset{\smile}{\omega}}a \to a$, entonces *hay* una *única* **función** F tal que

$$F : \omega \to a$$
$$\forall n \in \omega \left[F(n) \ = \ G(F \upharpoonright n) \right]$$

Consideremos pues: $b \in INF,\ b \subseteq a$ y $\omega \sim_g a$. Sea $G : {}^{\underset{\smile}{\omega}}a \to a$, definida como sigue:

$$\forall s \in {}^{\underset{\smile}{\omega}}a,\ G(s) = g\left(\cap\, g^{-1}[b \setminus IMG(s)]\right)$$

G está bien definida, pues: Sea $s \in {}^{\underset{\smile}{\omega}}a.$ Como el $DOM(s) \in \omega,$ tenemos que $IMG(s) \in FIN;$ de esto y de que $b \in INF$, obtenemos que $\emptyset \neq b \setminus IMG(s) \subseteq a$ y por tanto, $\emptyset \neq g^{-1}[b \setminus IMG(s)] \subseteq g^{-1}[a] = \omega.$ Así, $\cap\, g^{-1}[b \setminus IMG(s)] \in \omega = DOM(g).$

Ahora bien, si aplicamos la versión anterior del Teorema de Recursión a nuestro conjunto a y a ésta $G,$ obtenemos que hay una (única) función $F : \omega \to a,$ con la propiedad:

$$\forall n \in \omega \left[F(n) \ = \ G(F \upharpoonright n) \right]$$

pero entonces, si $n \in \omega,$ lo primero que tenemos es que $F \upharpoonright n \in {}^{\underset{\smile}{\omega}}a = DOM(G)$ y de aquí que:

$$\begin{aligned} F(n) &= G(F \upharpoonright n) \\ &= g\left(\cap\, g^{-1}[b \setminus IMG(F \upharpoonright n)]\right) \\ &= g\left(\cap\, g^{-1}[b \setminus F[n]]\right) \\ &= g\left(\bigcap \left\{ m \in \omega \ / \ g(m) \in b \setminus F\,[n] \right\}\right) \end{aligned}$$

No es dificil ver (por inducción) que $IMG(F) \subseteq b.$ Así $F = f.$