La Jerarquia Acumulativa

Ya llevamos un chorro estudiando conjuntos y bueno, ¿Que es un conjunto? no... pues quien sabe... como que tenemos una idea clara de que es un conjunto pero no podemos dar una idea satisfactoria así que en ves de preguntarnos que es un conjunto tratemos de contestar ¿Como construir un conjunto? (Por cierto en este capítulo mencionaremos explicitamente cada ves que usemos Axioma de Elección)

Podemos pensar que tenemos cosas ahi volando en el aire, tomamos una bolsa y fuuummm!!! intentaamos atrapar algunas con la bolsa y lo que tenemos es un conjunto. Entonces ¿Como empiezan a crearse los conjuntos? Al principio hay nada entonces tomamos una bolsita fuuummm y obtenemos al vacio!! Entonces con el ya podemos formar $\{\emptyset\}$ despues $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y así podemos ir consiguiendo muchos más conjuntos. Observen que de esta forma para crear a un conjunto ya habiamos creado a sus elementos previamente

Recursivamente podemos obtener todos los conjuntos creados de esta manera:

Definición Definimos recursivamente la funcional:

$$R_{\_} \;:\; OR \longrightarrow V$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \emptyset \\ R_{\alpha^+} &= \wp(R_\alpha) \\ \underset{\alpha\in LIM}{R_\alpha} &= \bigcup_{\xi\in\alpha} R_\xi \end{aligned}$$

$$BF = \bigcup_{\alpha\in OR} R_\alpha$$

De momento no mensionaremos por que se llama BF, pero lo veremos despues.

Recordemos que la potencia de un transitivo es transitivo y unión de transitivos es transitivo por lo que:

Lema $a)$ **Todo R_α es transitivo**.

$b)$ BF **es transitivo**.

Además si a es transitivo entonces $a \subseteq \wp(a)$ por lo que podemos concluir que si $\alpha < \beta$ entonces $R_\alpha \subseteq R_\beta$. Aunqué también hubieramos podido haber obtenido este resultado ya que si $\alpha < \beta$ entonces $R_\alpha \in R_\beta$. Pero en realidad la contensión es propia, y el elemento que está en R_β pero no en R_α es precisamente...R_α!!!

Lema **No hay α tal que $R_\alpha \in R_\alpha$.**

Lo haremos por inducción. Si $\alpha = 0$ no hay algo que hacer, así que supongamos que $R_\alpha \notin R_\alpha$ y veamoslo para R_{α^+}. Supongamos que $R_{\alpha^+} \in R_{\alpha^+} = \wp(R_\alpha)$ por lo que $R_{\alpha^+} \subseteq R_\alpha$ y como $R_\alpha \in R_{\alpha^+}$ entonces $R_\alpha \in R_\alpha$!!!!

Ahora tomemos $\alpha \in LIM$ y supongamos que es cierto para los anteriores. Si $R_\alpha \in R_\alpha$ entonces habría $\xi < \alpha$ tal que $R_\alpha \in R_\xi$ pero de esta forma $R_\xi \in R_\xi$!!!

De esta manera podemos concluir:

Corolario **Si $\alpha < \beta$ entonces $R_\alpha \subsetneq R_\beta$.**

¿Será BF un conjunto? Resulta que no, pues la siguiente proposición nos dice que contiene a la clase de los ordinales:

Proposición **$OR \subseteq BF$ incluso cualquier $\alpha \in OR$ aparece por primera ves en R_{α^+}.**

Probaremos la proposición por inducción. Para el 0 es claro, así que supongamos que α aparece por primera ves en R_{α^+}. Como $\alpha \in R_{\alpha^+}$ entonces $\alpha \subseteq R_{\alpha^+}$ por lo que $\alpha^+ \subseteq R_{\alpha^+}$ y así $\alpha^+ \in R_{\alpha^{++}}$. Solo nos falta probar que $\alpha^+ \notin R_{\alpha^+}$ (pues así tampoco puede aparecer más abajo) pero supongamos que si pertenece por lo que $\alpha^+ \subseteq R_\alpha$ lo cual implica que $\alpha \in R_\alpha$!!!

Ahora tomemos $\alpha \in LIM$ y supongamos que es cierto para todos los anteriores. Si $\xi < \alpha$ como $\xi \in R_{\xi^+}$ entonces $\xi \in R_\alpha$ de modo que $\alpha \subseteq R_\alpha$ y así $\alpha \in R_{\alpha^+}$. Si $\alpha \in R_\alpha$ entonces habría $\xi < \alpha$ tal que $\alpha \in R_\xi$ y por consecuencia $\xi \in R_\xi$!!!

Como BF esta construido por estratos, dado un x ahí podriamos preguntarnos cuando aparece por primera ves. Sin embargo puesto que en el paso límite no aparecen nuevos conjuntos entonces todo monito aparece por primera ves en un estrato sucesor por lo que resulta más practica la siguiente definición:

Definición Definimos la funcional *rango* como:

$$\rho \;:\; BF \;\rightarrow\; OR$$

$$\rho(x) \;=\; min\;\left\{\;\alpha\;\middle|\;x \in R_{\alpha^+}\;\right\}$$

Hubieramos podido haber definido $\rho(x) \;=\; min\;\left\{\;\alpha\;\middle|\;x \in R_{\alpha}\;\right\}$ y resulta como que más intuitivo y claro. El problema es que a cada rato tendriamos que decir cosas así "Como $\rho(x)$ es un sucesor, sea α tal que $\rho(x) = \alpha^+$". (Aunque aún así a mi me gustaría más que fuera de esta forma, pero bueno yo no invente esta definición...)

Observación

$a)$ Si $x \in BF$ entonces x aparece por primera ves en $R_{\rho(x)^+}$ (en particular $x \notin R_{\rho(x)}$ y este es el último al que no pertenece).

$b)$ $\rho(\alpha) = \alpha$ para cualquier α ordinal.

$c)$ $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

$d)$ Si $a \in R_\alpha$ entonces $\rho(a) < \alpha$.

Aunque como lo veremos a continuación, $\rho(x)$ resulta ser el primero en el que x esta contenido:

Lema **Sea** $x \in BF$ **entonces** $\rho(x) \;=\; min\;\left\{\;\alpha\;\middle|\;x \subseteq R_{\alpha}\;\right\}$

El resultado se tiene pues estar en R_{α^+} es lo mismo que estar en R_α

En nuestra motivación mencionamos que los elementos de un conjunto fueron creados antes que el conjunto, y esta es la prueba formal:

Lema **Sea** $a \in BF$ **y** $b \in a$ **entonces** $\rho(b) < \rho(a)$.

Sabemos que $a \subseteq R_{\rho(a)}$ por lo que $b \in R_{\rho(a)}$ y así por la observación previa concluimos que $\rho(b) < \rho(a)$.

Como esto ya es súper fácil obtener el siguiente grán teorema:

Proposición **Sea** $A \subseteq BF$ **no vacia. Entonces** A **tiene minimal (Así** BF **está bien fundado).**

Sea $a \in A$ de rango mínimo. Afirmamos que a es minimal, pero si no lo fuera habría $b \in A$ tal que $b \in a$ y por lo tanto $\rho(b) < \rho(a)$!!!!

Y naturalmente obtenemos como corolario:

Corolario

$a)$ **No hay** $a \in BF$ **tal que** $a \in a$.

$b)$ **No hay** $a, b \in BF$ **tal que** $a \in b$ **y** $b \in a$.

$c)$ **No hay** $a_0, a_1, \ldots, \in BF$ **tal que** $a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni \ldots$

Una clase es transitiva si sus elementos son subconjuntos, ahora veamos la definición dual:

Definición Una clase A es *supertransitiva* si todo subconjunto de A pertenece a A.

Observen que no tendría sentido pedir toda subclase de A, pues una clase propia no puede pertenencer a otra. Ahora veamos que no existen los conjuntos supertransitivos:

Proposición **Si** A **es supertransitiva entonces** A **es clase propia.**

Una forma de probarlo sería por que en caso contrario $\wp(A) \subseteq A$ lo cual contradice el teorema de Cantor. Otra forma sería tomando el subconjunto $r = \{ x \in A \mid x \notin x \}$ y llegamos a una contradicción a la Russel.

Una clase es transitiva supertransitiva si sus elementos son precisamente sus subconjuntos, y veremos que BF tiene estas propiedades:

Proposición BF **es transitivo supertransitivo**.

Supongamos que $a \subseteq BF$ de esta forma si $x \in a$ entonces $x \in R_{\rho(x)^+}$ por lo que si definimos $\alpha = sup \{ \rho(x)^+ \mid x \in a \}$ entonces $a \subseteq R_\alpha$ y así $a \in R_{\alpha^+}$.

Esto nos da otra linda prueba de que BF no es un conjunto. Incluso esta propiedad que tiene BF es así super importante, nos la volveremos a encontrar cuando veamos el Teorema de Rieger. Con lo que hemos aprendido hasta ahora podemos ver que el rango puede calcularse recursivamente:

Proposición **Si** $a \in BF$ **entonces** $\rho(a) = sup \{ \rho(x)^+ \mid x \in a \}$

Sea $\alpha = sup \{ \rho(x)^+ \mid x \in a \}$ claramente $\alpha \leq \rho(a)$. Por otro lado, tenemos que si $x \in a$ entonces $x \in R_{\rho(x)^+} \subseteq R_\alpha$ de manera que $a \subseteq R_\alpha$ y así $\rho(a) \leq \alpha$.

Es posible encontrar a los estratos en terminos del rango:

Proposición $R_\alpha = \{ a \mid \rho(a) < \alpha \}$

Si $\rho(a) < \alpha$ entonces $a \in R_\alpha$ y al reves, si $a \in R_\alpha$ tenemos que $\rho(a) < \rho(R_\alpha) = \alpha$.