El Rango de Algunos Conjuntos

Usando las formulitas y algunos teoremitas de los capítulos pasados podremos descubrir exactamente donde se encuentran algunos conjuntos dentro de BF. De alguna manera probaremos que "ZF es cierto en BF" pero por ahora lo dejaremos intuitivamente y lo formalizaremos cuando veamos la teoría de modelos de conjuntos. Terminaremos el cápitulo encontrando el rango de algunos conjuntos famosos.

Como $a \in BF$ si y solo si $a \subseteq BF$ y $\rho(a) = sup\{\rho(x)^+ \mid x \in a\}$ entonces es fácil ver que:

Proposición **Sean** $a, b \in BF$ **entonces**:

a) $\{a,b\} \in BF$ **y** $\rho(\{a,b\}) = sup\{\rho(a)^+, \rho(b)^+\}$.

b) $\bigcup a \in BF$ **y** $\rho(\bigcup a) = \bigcup\{\rho(x) \mid x \in a\}$ por lo que $\rho(\bigcup a) \leq \rho(a)$.

c) **Si** $s \subseteq a$ **entonces** $s \in BF$ **y** $\rho(s) \leq \rho(a)$.

d) $\wp(a) \in BF$ **y** $\rho(\wp(a)) = \rho(a)^+$.

e) $(a,b) \in BF$ **y** $\rho((a,b)) = sup\{\rho(a)^+, \rho(b)^+\}^+$.

f) $a \cup b \in BF$ **y** $\rho(a \cup b) = sup\{\rho(a), \rho(b)\}$.

g) $a \times b \in BF$ **y** $\rho(a \times b) = \bigcup\{\rho(x)^{+++} \mid x \in a \cup b\}$.

h) **Si** $f : a \to b$ **entonces** $f \in BF$ **y** $\rho(f) \leq \rho(a \times b)$.

i) ${}^a b \in BF$ y $\rho(a \times b) \leq \rho({}^a b) \leq \rho(a \times b)^+$.

j) Si $r \subseteq a \times a$ es un buen orden entonces $r \in BF$.

Tuvimos que $\rho(\bigcup a) \leq \rho(a)$ puede darse la igualdad, por ejemplo si hacemos $a = \omega$ o puede darse escrita, como tomando a a como cualquier ordinal sucesor. También podemos ver que $\rho({}^a b)$ es $\rho(a \times b)$ o $\rho(a \times b)^+$. Los dos casos son posibles, por ejemplo ${}^\omega\omega$ tiene rango $\rho(\omega \times \omega)^+$ mientras que ${}^\omega\omega_1$ tiene rango $\rho(\omega \times \omega_1)$.

Como en cada construcción subimos poquitos pasos entonces:

Corolario **Sea** $\omega < \alpha \in LIM$ **y** $a, b \in R_\alpha$ **entonces** $\emptyset, \{a,b\}, \bigcup a, \wp(a), (a,b), a \cup b, \omega, a \times b, {}^a b \in R_\alpha$.

Ahora pasaremos a encontrar el rango de $\omega, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$:

Lema $\quad a)\ \ \rho(\omega) = \omega$

$\quad b)\ \ \rho(\omega \times \omega) = \omega$

Para constuir a $\mathbb{Z}$ tomamos la relación $\sim$ en $\omega \times \omega$ donde $(a,b) \sim (x,y)$ si y solo si $a+y = b+x$ y entonces definimos $\mathbb{Z} = \{ \ \overline{(a,b)} \ \mid \ a,b \in \omega \ \}$. Cada $\overline{(a,b)} \subseteq \omega \times \omega$ por lo que $\overline{(a,b)} \in R_{\omega+1}$ y de esta forma $\mathbb{Z} \in R_{\omega+2}$.

La construcción de $\mathbb{Q}$ es muy parecida a la de $\mathbb{Z}$, solo definimos la relación $\sim$ en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ dada por $(a,b) \sim (c,d)$ si y solo si $b \neq 0 \neq c$ y $ad = bc$. y entonces $\mathbb{Q} = \{ \ \overline{(a,b)} \ \mid \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \ \}$.

Como todos los enteros están en $R_{\omega+1}$ entonces todas las parejitas de enteros están en $R_{\omega+3}$ por lo que todos los racionales están en $R_{\omega+4}$ y así $\mathbb{Q} \in R_{\omega+5}$.

Como hay muchas construcciones de $\mathbb{R}$, naturalmente el rango de los reales depende de cada construcción. Para nosotros un real será una parejita (a,b) donde:

$\star)$ $a,b \subseteq \mathbb{Q}$

$\star\star)$ $\mathbb{Q} = a \cup b$ **y** $a \cap b = \emptyset$

$\star\star\star)$ **Ninguno es vacio y ninguno es todo** $\mathbb{Q}$

$\star\star\star\star)$ **Si** $x \in a$ **y** $y \in b$ **entonces** $x < y$

$\star\star\star\star\star)$ a **no tiene máximo**

Si a,b son como arriba entonces a,b están en el mismo nivel que $\mathbb{Q}$ $(R_{\omega+5})$ pues si ambos estuvierán más abajo entonces $\mathbb{Q}$ también. De esta forma todas las parejitas están en $R_{\omega+7}$ por lo que $\mathbb{R} \in R_{\omega+8}$.

Como cada real está en $R_{\omega+7}$ entonces las parejitas de reales están en $R_{\omega+9}$ por lo que $\mathbb{C} \in R_{\omega+10}$. Pegando todo hemos probado que:

Proposición a) $\rho(\omega) = \omega$

b) $\rho(\mathbb{Z}) = \omega + 1$

c) $\rho(\mathbb{Q}) = \omega + 4$

d) $\rho(\mathbb{R}) = \omega + 7$

e) $\rho(\mathbb{C}) = \omega + 9$

Sin embargo podemos modificar estas construcciones para que estas estructuras aprescan antes. Una de las cosas que hace que su rango cresca es que al tomar par ordenado subimos dos niveles. Así que ahora veremos una definición alternativa de par ordenado ideada por Quine la cual no nos aumenta de nivel en los estratos transfinitos:

Definición Definimos la *función de Quine* como:

$$Q : V \to V$$

$$Q(a) = \{ n^+ \mid n \in \omega \cap a \} \cup a - \omega$$

Es decir Q lo que hace es sumarle uno a cada natural de a . Notemos que $0 \notin Q(a)$ para cada a. Además:

Lema a) Q **es inyectiva**

b) **Si** $a \notin R_\omega$ **entonces** $\rho(Q(a)) = \rho(a)$

Con esto podemos dar la nueva definición de par ordenado:

Proposición Definimos el *par de Quine o par plano* de a y b como:

$$(a,b)_Q = \{ Q(x) \mid x \in a \} \cup \{ Q(y) \cup \{0\} \mid y \in b \}$$

Notemos que $a = \{ x \mid Q(x) \in (a,b)_Q \}$ mientras que $b = \{ y \mid Q(y) \cup \{0\} \in (a,b)_Q \}$ por lo que la definición de Quine cumple lo que debe cumplir cualquier definición decente de par ordenado:

Corolario **Si** $(a,b)_Q = (c,d)_Q$ **entonces** $a = c$ **y** $b = d$

La razón del por que estamos viendo esto es lo siguiente:

Proposición $a)$ **Si** $a,b \in R_\alpha$ **con** $\alpha \geq \omega$ **entonces** $(a,b)_Q \in R_\alpha$

$b)$ **Si** $\omega \leq \rho(a)$ **o** $\omega \leq \rho(b)$ **entonces** $\rho((a,b)_Q) = sup\{\rho(a),\rho(b)\}$

Sabemos que $\rho(\omega) = \omega$ y este ya no lo podemos mejorar, pues ω es infinito. Ahora para la construcción de $\mathbb{Z}$ en ves de tomar clases de equivalencia podriamos tomar un representante de cada uno, por ejemplo definir:
$\mathbb{Z}' = \{ \ (a,0) \ | \ a \in \omega \ \} \cup \{ \ (0,b) \ | \ b \in \omega \ \}$ y así $\rho(\mathbb{Z}') = \omega$
(ya que $\mathbb{Z}' \subseteq \omega \times \omega$). Para los racionales hacemos lo mismo, pero usando el par de Quine (notemos que para $\mathbb{Z}$ no nos ayuda el par de plano) y definir
$\mathbb{Q}' = \{ \ (a,b)_Q \ | \ a,b \in \mathbb{Z}'$ y son primos relativos $\}$. Todos los elementos de $\mathbb{Z}'$ están en R_ω de modo que sus pares de Quine están también en R_ω y así $\rho(\mathbb{Q}') = \omega$. La definición de $\mathbb{R}'$ es la misma que la de $\mathbb{R}$ pero usando el par de Quine. Todos los subconjuntos de $\mathbb{Q}'$ están en $R_{\omega+1}$ por lo que las parejitas que necesitamos también y así $\rho(\mathbb{R}') = \omega + 1$. Observemos que esto es optimo pues por tamaño es imposible que $\rho(x) = \omega$ con x no numerable. Naturalmente $\mathbb{C}'$ será todos los pares de Quine de $\mathbb{R}'$ por lo que $\rho(\mathbb{C}') = \omega + 1$. Resumiendo:

Proposición $a)$ $\rho(\omega) = \omega$

$b)$ $\rho(\mathbb{Z}') = \omega$

$c)$ $\rho(\mathbb{Q}') = \omega$

$d)$ $\rho(\mathbb{R}') = \omega + 1$

$e)$ $\rho(\mathbb{C}') = \omega + 1$

Ahora hablemos un poco sobre la Hipotesis del Continuo (esto me lo dijo Jose Alfredo).

¿En que estrato se decide la Hipotesis del Continuo? sabemos que HC es equivalente a que exista $f : \mathbb{R} \to \omega_1$ inyectiva. Cada par (r,α) con $r \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \omega_1$ aparece en R_{ω_1} y como $f[\mathbb{R}]$ es no acotado entonces $f \subseteq R_{\omega_1}$ de manera que $f \in R_{\omega_1}$. De esta forma para saber si HC es verdadera o no "solo" tendríamos que revisar a todo R_{ω_1} para ver si ahi hay una función inyectiva de los reales a ω_1. De haberla sería verdadera y en caso contrario sería falsa.

Sin embargo no es necesario irnos tan arriba para conocer la verdad de HC!!!

Dado que $|R_{\omega+1}| = 2^{\aleph_0}$ entonces hay $a \in R_{\omega+2}$ que tiene tamaño $\aleph_1$ de esta manera la hipotesis del continuo es equivalente a que hay una biyección entre $\wp(\omega)$ y a. Todo subconjunto de ω y todo elemento de a están en $R_{\omega+1}$ ahora en ves de coinsiderar funciones normales, coinsideraremos "funciones de Quine" que son lo mismo que las funciones pero usando pares planos en ves de pares ordenados normales.

Como todo par plano con la primera entrada en $\wp(\omega)$ y la segunda en a está en $R_{\omega+1}$ entonces toda función de Quine de $\wp(\omega)$ a a está en $R_{\omega+2}$. De esta forma no es necesario revisar a todo $R_{\omega_1} + 1$ para conocer la Hipotesis del Continuo si no a $R_{\omega+2}$. (Fue una gran mejora no?)