La funcional $\beth$.

Naim Nuñez Morales.

Resumen

En estas notas daremos la definición de los $\beth$'s y algunas pequeñeces. No daremos pruebas. algunas son tarea y otras las vimos ya.

1. Definición de los beth's

Despúes de la funcional $\aleph$, que nos da "todos los cardinales infinitos" de una manera ordenada, hay una funcional que nos da "todas las potencias de $\aleph_0$", la funcional beth.

Ambas se relacionan (de hecho, se igualan) por medio de la **HGC**, como veremos. Sin embargo, no sabemos que pasa en ausencia de tal hipótesis.

Definición 1. La funcional $\beth$ (beth) se define de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}\beth_0 = \aleph_0 \\ \forall \alpha\ \beth_{\alpha^+} = 2^{\beth_\alpha} \\ \forall \gamma \in LIM\ \beth_\gamma = \bigcup \{\beth_\beta : \beta \in \gamma\}\end{gathered}$$

Es gracias al Esquema General de Recursión que la definición anterior tiene sentido dentro de la Teoría de Conjuntos (una funcional como la definida existe y además es única).

Por la definición se tiene que $\beth$ es continua y no es difícil ver que es monótona, por lo que es normal.

Vamos a familiarizarnos con esta nueva funcional.

Proposición 1.

$$\forall \alpha \left(\alpha \preccurlyeq \beth_\alpha \right)$$

Demostración. Por inducción.

$\dashv$

Proposición 2.

$$\forall \alpha, \beta \left(\alpha \leq \beta \longrightarrow \beth_\alpha^{\beth_\beta} = \beth_{\beta^+} \right)$$

Demostración.

$$\beth_{\beta^+} = 2^{\beth_\beta} \preccurlyeq \beth_\alpha^{\beth_\beta} \preccurlyeq \left(2^{\beth_\alpha} \right)^{\beth_\beta} = 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta^+}$$

$\dashv$

Proposición 3.

$$\forall \alpha, \beta \left(\beta < \alpha^+ \longrightarrow \beth_{\alpha^+}^{\beth_\beta} = \beth_{\alpha^+} \right)$$

Demostración.

$$\beth_{\alpha^+}{}^{\beth_\beta} = \left(2^{\beth_\alpha} \right)^{\beth_\beta} = 2^{\beth_\alpha}$$

$\dashv$

Proposición 4 (Bajo **HGC**)**.**

$$\forall \alpha \left(\aleph_\alpha = \beth_\alpha \right)$$

Demostración. Por Inducción. $\dashv$