HGC implica AE.

Naim Nuēz Morales.

Resumen

Estos apuntes, más que notas detalladas sirven como bitácora de lo que llevamos visto en clase (si, Manuel Valdespino pidio algo así) con algunas demostraciones.

Empezamos pues...

La meta de estas notas es mostrar que la Hipótesis Generalizada del Continuo implica el Teorema del Buen Orden. Es una prueba nada directa, a grandes rasgos, hay que re-establecer ciertos hechos que suceden con **AE** o bien versiones modificadas que funcionen sin este bonito axioma.

1. Repasando básicos...

Una de las relacionales básicas de la Teoría de Conjuntos es equipotencia o "tener la misma cardinalidad"[1].

De hecho hasta tenemos una notación clasiquísima para ello:

$$|a| = |b| \ \ syss \ \ \exists f : a \longrightarrow b \text{ biyectiva.}$$

Claro, en Teoría de Conjuntos usamos la notación $a \sim b$. Bajo **TBO**, **CAR** es una "clase de representantes" para $\sim$.

Nosotros usaremos la primer notación para otra cosa. Como la relacional $\sim$ es de equivalencia, usaremos $|a|$ para designar a la CLASE de todos los conjuntos equipotentes con a;

$$|a| := \{x : x \sim a\}$$

Ahora bien, podemos hablar de la suma o el producto de dos "clases", y de la potencia de una clase, de forma natural:

1. $|a| + |b|$ es la clase de todos los conjuntos equipotentes con la unión ajena de a y b.

2. $|a||b|$ es la clase de todos los equipotentes con $a \times b$.

3. $2^{|a|}$ es la clase de todos los equipotentes con $\wp(a)$.

Ademas de la equipotencia, tenemos la relacional de dominancia que ordena parcialmente al universo[2]:

$$a \preccurlyeq b \ \ syss \ \ \exists f : a \longrightarrow b \text{ inyectiva.}$$

Con ella, podemos definir una relacional sobre las "clases" de equipotencia:

$$|a| \leq |b| \ \ syss \ \ a \preccurlyeq b$$

[1]Que no es lo mismo que tener un cardinal. RECUERDENLO MUY BIEN.

[2]Recuerden esa tarea del primer curso: Cantor-Schroeder-Bernstein

2. Primeros Resultados ya vistos y que no se escribira la prueba....

Los primeros resultados ya los vimos antes (Fue justo donde terminamos el semestre pasado).

Lema 1. Para cualesquiera a, b conjuntos tales que

- $|a| + |a| = |a|$, y
- $|a| + |b| = 2^{|a|}$

se tiene que $2^{|a|} \leq |b|$ (la otra desigualdad es trivial)[3].

Lema 2. Sea a un conjunto. Si $\omega \preccurlyeq a$ entonces $2^{|a|} + |a| = 2\left(2^{|a|}\right) = 2^{|a|}$.

3. Recordando un isomorfismo de orden

Consideremos un orden parcial $\langle b, < \rangle$. Para cada $x \in b$, definimos el $<$–segmento inicial de x, de la manera usual:

$$x_< := \{y : y < x\}$$

Es claro que $x_< \in \wp(b)$. Aún más, la función

$$\begin{array}{rccc} \iota : & b & \longrightarrow & \wp(b) \\ & x & \longmapsto & x_< \end{array}$$

es una función monótona de $\langle b, < \rangle$ en $\langle \wp(b), \subset \rangle$, pero no es morfismo de orden:

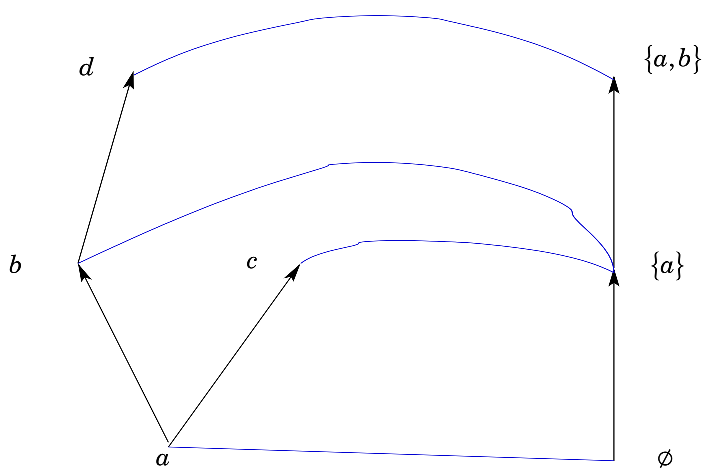

Figura 1: $\iota(c) \subset \iota(d)$, pero $c \not< d$.

Afirmación: Si $\langle b, < \rangle \in$ **COTO**, ι es morfismo de orden.

Si definimos $seg_<(b) := Im(\iota)$, entonces ι es isomorfismo de orden entre $\langle b, < \rangle$ y $\langle seg_<(b), \subset \rangle$.

Si además, tomamos un conjunto a y consideremos el conjunto d como:

$$d := \left\{ seg_<(b) : b \subseteq a \ \& \ < \subseteq b \times b \ \& \ \langle b, < \rangle \in \textbf{COBO} \right\}$$

podemos definir una función $f : d \longrightarrow H(a)$ (el Hartog de a), via el isomorfismo anterior, que asocia cada $seg_<(b) \in d$ con el tipo de orden de $\langle b, < \rangle$.

Observe que: $d \subseteq \wp\left(\wp(b)\right) \subseteq \wp\left(\wp(a)\right)$.

Si ahora definimos $h : H(a) \longrightarrow \wp(d)$ como $h(\alpha) = f^{-1}[\alpha]$, es fácil ver que h es inyectiva, por lo que $H(a)$ entra inyectivamente en $\wp\left(\wp\left(\wp(b)\right)\right)$. Con esto, hemos demostrado el siguiente lema.

---

[3] Aquí, Valdespino hizo la observación de que la proposición es un caso particular de: si $a < c$ y $a \cup b = c$, entonces $b = c$. Nos debe la demostración.

Lema 3. Para todo conjunto a se tiene que

$$|H(a)| \leq 2^{\left(2^{\left(2^{|a|}\right)}\right)}$$

4. Exponenciando un conjunto muy *ad hoc*.

Cada vez nos acercamos mas a la prueba deseada... No se enfaden...

Como los conjuntos infinitos son los que no estamos seguros que sean bien ordenables, nos tomaremos uno de ellos y le uniremos un conjunto numerable con el que sea ajeno. El juego aquí va a ser potenciar esto y ver que cosas pordemos sacar.

Definimos pues:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \kappa = 2^{\omega+|a|} \\ \mu_{n^+} &= 2^{\mu_n} \end{aligned}$$

Los μ's no necesariamente son ordinales (piense el caso en que a es un conjunto de Dedekind), pero si aceptan un subconjunto numerable. Más aún, son no numerables por ser potencias de cosas al menos numerables.

Afirmación: Para toda n, $\mu_n + \mu_n = \mu_n$.
La prueba es por inducción y se usa el Lema 2.

Ahora si, vamos a hacer uso de **HGC**, por lo que es conveniente recordar lo que dice:

$$\forall x \neg \exists y \left(x \prec y \prec \wp(x)\right)$$

o bien

$$\forall x \forall y \left(x \preccurlyeq y \preccurlyeq \wp(x) \longrightarrow \left(x \sim y \vee y \sim \wp(x)\right)\right)$$

Lema 4. Sea a un conjunto y κ con en la construcción de los μ's.

$$H(\kappa) \preccurlyeq \mu_{n^+} \Longrightarrow \left(\kappa \in BO \vee H(\kappa) \preccurlyeq \mu_n\right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mu_n &\leq H(\kappa) + \mu_n && \text{Por ser unión disjunta} \\ &\leq \mu_{n^+} + \mu_n && \text{Por hipótesis del lema} \\ &\leq \mu_{n^+} + \mu_{n^+} && \text{Por construcción de los } \mu \\ &= \mu_{n^+} && \text{Por la afirmación vista antes.} \end{aligned}$$

Así las cosas $\mu_n \leq H(\kappa) + \mu_n \leq \mu_{n^+}$. Por **HGC** tenemos dos casos:

1. $\mu_n = H(\kappa) + \mu_n$. Como es unión disjunta, $H(\kappa) \leq \mu_n$.

2. $H(\kappa) + \mu_n = 2^{\mu_n}$. Usando conjuntamente la afirmación anterior con μ_n y el lema 1, se tiene que $H(\kappa) = \mu_{n^+}$. Por lo que κ es bien ordenable (véanse las notas sobre Hartog del semestre pasado).

⊣

Ahora si, ya estamos a una patada del resultado:

Teorema 5. HGC implica **AE**.

Demostración. **TAREA.** ⊣