El colapso de Mostowski.

Naim Nuñez Morales.

Resumen

El hilo conductor de estas notas será la búsqueda de ciertas condiciones en una estructura relacional $\langle a, r\rangle$ para encontrar un conjunto bien fundado b que, con la pertenencia, sea isomorfo a aquel. De hecho, lo vamos a hacer con clases, con ayuda del **EGR/RBF** (Visiten el tema).

El último teorema que vimos[1] nos asegura que todas las estructuras relacionales tienen una estructura isomorfa en **BF**. Un ejemplo sencillo que podemos hacer rápidamente es (sin importar quien sea a):

$$\langle \{a\}, \rangle \cong \langle \{\varnothing\}, \varnothing \rangle$$

Sin embargo, cuando el conjunto no es finito, no tenemos, de principio, la seguridad de que la relación que obtengamos sea la pertenencia (en el par de la derecha, la pertenencia restringida a $\{\varnothing\}$ es el vacío).

Procediendo como matemáticos de arte, tomamos una estructura relacional $\langle a, r\rangle$ y vamos a suponer que existe tal conjunto b para el que $\langle a, r\rangle \cong \langle b, \in_b\rangle$[2]

Como son isomorfos (preserva y refleja relaciones), obtenemos que:

1. r debe bien fundar a a, pues un [iso]morfismo respeta minimales. Así $\langle a, r\rangle \in$ **COBF**

2. r debe ser izquierda limitada, por que una función inyectiva manda clases en clases.

[1]Véanse las notas anteriores N_0.3…

[2] $\in_a = \in \cap a^2$.

La primera condición es la que nos remite al **EGR/RBF** y como ambas condiciones se pueden generalizar a clases, aumentaremos la apuesta y nos preguntaremos si (para clases A y $R \subseteq A \times A$) estas condiciones bastan para "emular" a la "estructura" dentro de **BF**:

> Sea A una clase y $R \subseteq A \times A$ una relacional bien fundada e izquierda limitada sobre A. ¿Se puede asegurar la existencia de una clase $B \subseteq$ **BF** y una funcional $F : A \longrightarrow B$ biyectiva tal que $\forall x, y \in A \left(xRy \longleftrightarrow F(x) \in F(y) \right)$?

En la búsqueda de la respuesta, iremos con la funcional que se obtiene mediante la siguiente modificación del **EGR/RBF** [3]. Ya tenemos a R, a A,nos falta dar una funcional $G : V \longrightarrow V \ldots$ Usemos a la identidad.

Así las cosas hay una única funcional $\pi : A \longrightarrow V$ tal que

$$\forall x \in A \left(\pi(x) = G(\pi[x_R]) = \pi[x_R] \right)$$

Dicho llanamente

$$\pi(x) = \left\{ \pi(y) : y R x \right\}$$

A π le llamamos la funcional de colapso de $\langle A, R \rangle$ y denotamos a $\pi[A]$ como M.

Ejemplo 1. Veamos un ejemplo que ya vimos en otro contexto:

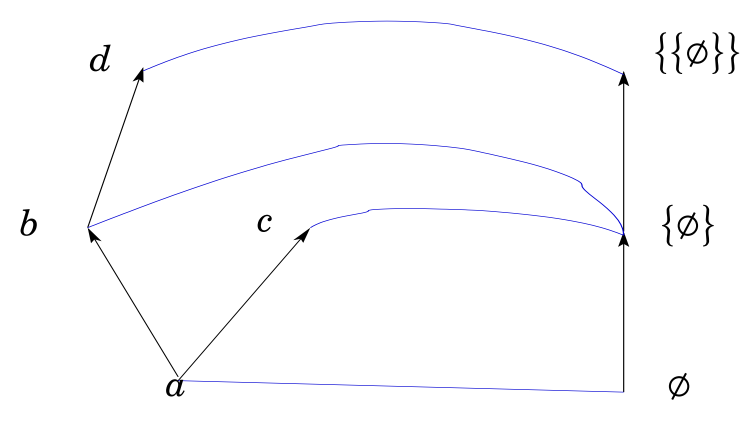

Figura 1: La funcional π ni es inyectiva ni refleja relaciones.

[3] **TAREA**. Demuestre esta versión a partir de la versión dada por El Profesor.

Proposición 1 ((Pre)colapso)**.** Sea A una clase y $R \subseteq A \times A$. Si R es bien fundada e izquierda limitada sobre A, entonces la funcional $\pi : A \longrightarrow V$ construida con anterioridad tiene las siguientes características:

- $\forall x, y \in A \left(xRy \longrightarrow \pi(x) \in \pi(y) \right)$ (monotonía).
- $M := \pi[A]$ es una clase transitiva.
- $M := \pi[A] \subseteq \mathbf{BF}$.

Demostración. La monotonía es directa, por la construcción de π y la transitividad hace uso de que $R \subseteq A \times A$.

Para el último ítem, hay que probar que $\forall x \in A \left(\pi(x) \in \mathbf{BF} \right)$.

Procedamos por inducción para **RBF**. Basta probar que

$$\forall x \in A \left(\forall y \left(y R x \longrightarrow \pi(y) \in \mathbf{BF} \right) \longrightarrow \pi(x) \in \mathbf{BF} \right)$$

Supongamos que $y \in x_R \longrightarrow \pi(y) \in \mathbf{BF}$. Así, $\pi[x_R] \subseteq \mathbf{BF}$.

Como **BF** es supertransitiva, $\pi[x_R] \in \mathbf{BF}$.

Luego, por construcción del colapso, $\pi(x) \in \mathbf{BF}$. ⊣

En la figura 1 vemos que π no es ni inyectiva no refleja relaciones. Sin embargo, como en M estamos usando la pertenencia, ahí los $\in$–predecesores determinan a un elemento, es lógico pedir eso mismo a R.

Definición 1. Sea A clase y R una relacional sobre A. Decimos que R es extensional [sobre A] si y sólo si

$$\forall x, y \in A \left(x_R = y_R \longrightarrow x = y \right)$$

Ejemplo 2.

- Si $\langle a, r \rangle \in \mathbf{COTO}$, r es extensional.
- Lo anterior no es cierto para órdenes parciales.
- $\in$ no siempre es extensional, como en $\{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$.
- Si A es transitiva, $\in$ si es extensional en A.

Observaciones. En clase, hubo comentarios de que esta condición era muy fuerte, pues parecía que R "rectificaba" o "linealizaba" a A, pero esto no necesariamente es cierto:

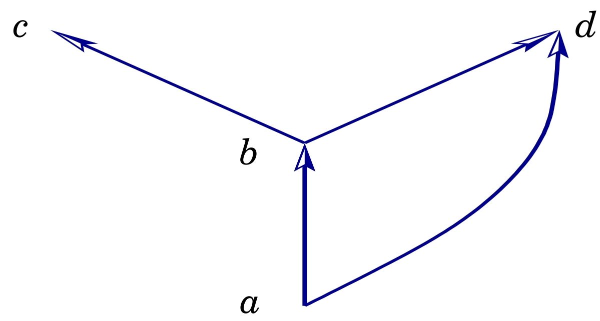

Figura 2: Una relacion bien fundada que no "linealiza" a su campo.

Lema 3. Bajo las mismas hipótesis de la proposición anterior, LSESE:

i. R es extensional sobre A.

ii. $\pi : A \longrightarrow M$ es biyección y además:

$$\forall x, y \in A \left(x R\, y \longleftrightarrow \pi(x) \in \pi(y) \right)$$

Demostración. Veamos:

(ii $\Longrightarrow$ i) Sean $x, y \in A$.

$$x_R = y_R \Longrightarrow \pi[x_R] = \pi[y_R] \Longleftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$$

Como π es inyectiva, la última igualdad implica que $x = y$.

(i $\Longrightarrow$ ii) Afirmamos que

$$\forall x \in A \underbrace{\forall y \in A \left(\pi(x) = \pi(y) \longrightarrow x_R = y_R \right)}_{\varphi(x)} \tag{1}$$

Con esta ecuación se prueba facilmente la inyectividad de π: Si $\pi(x) = \pi(y)$, entonces $x_R = y_R$. Como R es extensional, $x = y$.

Para probar que π es "isomorfismo", solo falta probar el regreso. Sean $x, y \in A$ tales que $\pi(x) \in \pi(y)$. Directamente no se puede afirmar que $x R y$, pues nada asegura que no nos pase algo como lo ilustrado en la figura 1.

Por construcción de π, hay $z R y$ tal que $\pi(z) = \pi(x)$. Por inyectividad, $x = z$ y ahora si $\pi(x) \in \pi(y)$. Este argumento se usa en prueba de la afirmación 1.

Ahora solo resta probar la afirmación. Nos basta demostrar que [4]

$$\forall x \in A \left(\forall y \left(y R x \longrightarrow \varphi(y) \right) \longrightarrow \varphi(x) \right)$$

Sea $x \in A$ y supongamos que π es inyectiva en x_R [5]

Para probar $\varphi(x)$, sea $x' \in A$ tal que $\pi(x) = \pi(z)$. Mostraremos que $x_R \subseteq z_R$.

Sea $w \in x_R$. Como π es monótona, $\pi(w) \in \pi(x) = \pi(z)$[6]. Por construcción de π, hay $u R z$ tal que $\pi(w) = \pi(u)$. Por hipótesis inductiva y extensionalidad, $u = w$. Por tanto $w R z$.

La otra contención es análoga, por lo que se da la igualdad requerida.

$\dashv$

Ahora si, ya hemos reunido todas las piezas para el resultado que buscabamos.

Teorema 4 (Teorema del Colapso (transitivo) de Mostowski)**.** Sea A una clase y $R \subseteq A \times A$ una relacional bien fundada, extensional e izquierda limitada sobre A. Bajo tales hipótesis se tiene que:

Existe una única $M \subseteq \mathbf{BF}$ transitiva y una única $\pi : A \longrightarrow M$ biyectiva tal que:

$$\forall x, y \in A \left(x R y \longleftrightarrow \pi(x) \in \pi(y) \right) \tag{2}$$

Demostración. Sea $M' \subseteq \mathbf{BF}$ transitiva y sea $\pi' : A \longrightarrow M'$ biyectiva que satisface (2). Para probar la unicidad hay que mostrar que se comporta como la π que obtuvimos antes, es decir;

$$\forall x \in A \left(\pi'(x) = \{ \pi'(y) : y R x \} \right)$$

[4]Si, es inducción para relacionales bien fundadas…

[5]Vea que, efectivamente, eso es lo que afirma la Hipótesis de Inducción.

[6]Aquí es donde volvemos a usar el argumento que dejamos claro que repetiríamos

$\supseteq$ Por monotonía.

$\subseteq$ $c \in \pi'(x) \Longrightarrow c \in M'$.

Como π' es sobre M', hay $w \in A$ tal que $\pi'(w) = c$.

Por tanto, $\pi'(w) \in \pi'(x)$. Pero π' es "isomorfismo", luego $w R x$.

Así las cosas, $\pi = \pi'$ $\dashv$

Una aplicación fácil es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

Corolario 6. Se dejan los siguientes resultados de **TAREA**.

1. Si $A \subseteq \mathbf{BF}$ es extensional, A es isomorfa a una única clase transitiva.
2. Si $A, B \subseteq \mathbf{BF}$ son transitivas y $A \cong B$ (con la pertenencia), entonces $A = B$.
3. Si $A \subseteq \mathbf{BF}$ es transitiva, la única funcional de A en sí misma que preserva $\in$ es la Identidad.