Capítulo 1

Lógica Básica

$\diamondsuit$ Es buen momento para dar una idea de como se desarrollará esta historia: Primero, nuestro objetivo es *formalizar* las reglas del razonamiento en general -cómo se aplican a la Matemática- y desarrollar sus propiedades. En particuar, estudiaremos la relación entre las reglas formalizadas y su “significado interno” (semántica), a la vez que las limitaciones de esas reglas formales. En otras palabras, ¿Qué tan buenas (y/o potentes) son para capturar la noción informal que tenemos de verdad?.

En segundo término, ya que hemos adquirido esas herramientas del razonamiento formal, empezaremos comportándonos (generalmente) como *usuarios* de la Lógica Formal.

Por *formalización* (lógica) entendemos la representación fiel o simulación de los “procesos de razonamiento” de las matemáticas *en general* (Lógica *Pura*), o de una teoría matemática particular (Lógica *aplicada*: por ejemplo la aritmética de Peano), dentro de una actividad que –en principio– es conducida propiamente por la *forma* o sintáxis de las proposicones matemáticas, ignorando del todo su significado.

Construimos, describimos y estudiamos las propiedades de esta *réplica artificial* de los procesos de razonamiento –la teoría formal– dentro de “la Matemática cotidiana” (tambien llamada Matemática “real” o “informal”), echando mano de la abundancia usual del simbolismo matemático, nociones y técnicas a nuestra disposición, potenciada por la capacidad descriptiva del idioma. Este entorno desde el cual construimos, buscamos y estudiamos nuestras teorias a menudo es llamada la *meta*teoría o, en general, *metamatemática*. El leguaje que usamos en él, esta mezcla de Matemática y “lenguaje natural”, es el *metalenguaje*.

La formalización convierte las teorías matemáticas en objetos matemáticos que podemos estudiar. Tal estudio incluye problemas interesantes como “¿Es demostrable la Hipótesis del Continuo a partir de los axiomas de la Teoría de Conjuntos?” ó “¿Se puede probar la consistencia de la Aritmética (axiomática) de Peano dentro de la Aritmética de Peano?"[1] Esto es análogo a construir un aerplano a escala, una réplica de las cosas reales, con la finalidad de estudiar a tráves de ella las propiedades, potencia y limitaciones del objeto real.

Sin embargo, es posible usar la teoría formal para *generar teoremas*, es decir, descubrir verdades en el dominio real, con solo "echar a andar" su réplica en el dominio formal. Hacer esto último "a mano"implica actuar como un "usuario" del sistema formal, un formalista, probar teoremas a través de él. De ellos resulta que, una vez que puedes apoyarte en él, es más fácil y seguro razonar formalmente que del modo informal. Este último muchas veces no distingue la sintáxis y la semántica (significado) y siempre se corre peligro que el usuario pueda asignar significados incorrectos (es decir, convenientes, pero no generales) a los símbolos que manipula.

"Formalismo para el usuario" es sólo un *slogan* revolucionario. Fue enunciado por Hilbert, el fundador del Formalismo, en parte como una manera de –como creyó[2]– formular teorías matemáticas de modo que permitan su comprobación (esto es, hacerles pruebas de diagnóstico) para asegurarse que estan libres de de contradicciones,[3] pero también como *la manera correcta de "hacer" Matemáticas*. Con esta propuesta deseaba salvar a la Matemática de sí misma, la cual, Hilbert creía, estaba siendo destruida en torno al pensamiento intuicionista de la escuela de Brauwer. De cierto modo, su programa deseaba llenar el hueco existente entre el campo clásico y el intuicionista, y hay evidencia que Heyting (un intuicionista influyente contemporáneo a Hilbert) pensaba que tal *acercamiento* era posible. Después de todo, ya que el significado es irrelevante para un formalista, todo lo que el esta haciendo (en una demostración) es "barajar ¿?" sucesiones finitas de símbolos, sin tratar o argumentar nada sobre objetos infinitos, algo bastante "decente", tanto que el intuicionista esta interesado en ella.[4]

---

[1] Por cierto, la respuesta a ambas preguntas es 'no', la primera en [Cohen, 1963], y la segunda en [Gödel, 1938].

[2] Esta creencia era infundada, como quedó demostrado en los teoremas de incompletud de Gödel.

[3] La *metateoría* de Gödel –es decir, el "mundo" o "laboratorio" *fuera de la teoría*, donde se construye (en realidad) la réplica– era finitaria. Así –Decía Hilbert– toda esta construcción y validación teórica debe efectuarse por *medios finitarios*. Este punto permitió una coexistencia pacífica con los intuicionistas y al mismo tiempo –como algunos autores afirman– destruyó su intención para fundamentar las Matemática en esta versión del formalismo. Los teoremas de incompletud de Gödel mostraron que una metateoría finitaria no sirve a estos propósitos.

[4] Mientras un formalista usa lógica clásica, un intuicionista usa otra lógica donde, por ejemplo, la doble negación no es *cancelable*. Un formalista del estilo Hilbert, a diferencia de un platonista, no cree -o no tiene que revelar a sus amigos intuicionistas que podría creer– que existan conjuntos infinitos *en la metateoría*, por lo que sus herramientas son solamente sucesiones finitas de símbolos. Para dimensionar el conflicto que se presenta, consideremos las siguiente anéctoda: Se dice que cuando Kronecker –el padre del intuicionismo– fue enterado de la demostración de Lindemann sobre la trscendencia de π, mientras afirmaba que era un resultado interesante,

1.1. Lenguajes de primer orden

En el modo de describirlo más abstracto (y por ello más simple) es una *teoría matemática formal* que abarca los siguientes conjuntos: Un conjunto de símbolos básicos o primitivos, $\mathscr{V}$, utilizados para construir *sucesiones de símbolos* (también llamadas expresiones o palabras) *sobre* $\mathscr{V}$. Un conjunto de expresiones, **Fbf** (Formulas bien formadas), *sobre* $\mathscr{V}$ llamadas las *fórmulas* de la teoría. Finalmente, un *subconjunto de* $\mathscr{V}$, llamado **Thm**, la colección de *teoremas* de la teoría.

Pues bien, esta es la *extensión* de una teoría, esto es, el conjunto explícito de objetos en ella. Pero, ¿Cómo es una teoría "dada"?

En la mayoría de los casos de interés para el matemático, esta dada por $\mathscr{V}$ y dos tipos de *reglas simples*; reglas de construcción de fórmulas y reglas de construcción de teoremas. Las reglas del primer tipo nos permiten construr, o *generar*, **Fbf** *desde* $\mathscr{V}$. Las reglas del segundo tipo generan **Thm** desde **Fbf**. En pocas palabras (e.g. [Bourbaki(B), 1966]), *una teoría consiste de un abecedario de símbolos primitivos*, *algunas "reglas" usadas para generar el "lenguaje de la teoría"* (*significado*, *esencia*, **Fbf**) *de esos símbolos*, *y algunas reglas "adicionales" usadas para generar los teoremas*. Sobre esto ampliamos a continuación:

Observación 1.1.1. $\diamondsuit$ ¿Qué es una regla? Corremos el riesgo de caer en la circularidad o en la pedantería si definimos de mas esta noción. Intuitivamente, las reglas que tenemos en mente son reglas de manipulación de "palabras", esto es, *cajas negras* (o funciones) que reciben entradas de "sucesiones" y responden con salidas de "cadenas". Por ejemplo, un teorema-pricipio de construcción muy conocido recibe como entrada una fórmula y una variable, y devuelve, esencialmente, la *palabra* formada por el símbolo $\forall$ seguido de la variable y esta, a su vez , por la fórmula.[5] $\diamondsuit$

(1) En primera instancia, el *lenguaje formal (de primer orden)*[6] $\mathscr{L}$, donde se discute la teoría, es una terna **(**$\mathscr{V}$**,TERM,Fbf)**, esto es, tiene tres componentes importantes, cada uno de los cuales es un conjunto.

$\mathscr{V}$ es el "abecedario" o vocabulario del lenguaje. Es la colección de los "ladrillos" sintácticos básicos que usamos para formar *expresiones* que son *términos* (miembros de **TERM**) o *fórmulas* (miembros de **Fbf**). nos aseguraremos que los procesos

también lo desechaba, sugiriendo que π – cuya expansión decimal es infinita no periódica– "no existe" (ver [Wil, 1963] p. 193). No vamos a discutir los principios del intuicionismo, pero es justo decir que los conjuntos infinitos *son posibles* en las matemáticas intuicionistas que se desarrollaron con Brouwer y su "escuela" de Amsterdam. Sin embargo, tales conjuntos deben ser (como todos los conjuntos de esa escuela) *finitamente generados* –del mismo modo que nuestros lenguajes formales y nuestro conjunto de teoremas (si nuestros axiomas también) lo son– en un sentido que resultará familiar a quienes hayan llevado el curso anterior. un curso de "teoría de lenguajes y autómatas" (ver [Wil, 1963]p.234).

[5] Esta regla es conocida como "generalización".

[6] Pronto diremos que significa que un leguaje sea "de primer orden".

que construyen términos o fórmulas, usando los labrillos de construcción básicos de $\mathcal{V}$, son intuitivamente algorítmicos o “mecánicos”.
Los términos codificarán formalmente “objetos”, mientras que las fórmulas codificarán “proposiciones” acerca de esos objetos.

(2) El razonamiento en la teoría será el proceso del descubrimiento de *proposiciones verdaderas* sobre objetos, es decir, *teoremas*. Este viaje comienza con determinadas fórmulas que codifican proposiciones que damos por sentadas (i.e., aceptamos sin “demostrar” como verdades básicas). Tales fórmulas son los *axiomas*. Hay dos tipos de ellos:

Axiomas *especiales* o *no lógicos*. Describen aspectos específicos de cualquier teoría específica que debamos construir. Por ejemplo, “$x + 1 \neq 0$” es un axioma paricular que contribuye a la caracterización de la Teoría de Números en los números naturales, $\mathbb{N}$.
El otro tipo de axiomas será común a *todas* las teorias. Es el tipo de cosas “universalmente válidas”, no son exclusivas de una teoría específica (por ejemplo, “$x = x$” es una “verdad universal”). Por esa raazón este tipo de axioma será denominado *lógico*.

(3) Por último, necesitaremos *reglas* para el razonamiento, llamadas *reglas de inferencia*. Estas reglas son las que nos permitirán deducir, o derivar, una proposición verdadera a partir de otras que ya hemos establecido como verdaderas.[7] Tales reglas serán elegidas olvidando su significado, y preocupándonos tan solo por la forma. Ellas aplicarán a un enunciado “configuraciones” de ciertas *formas reconocibles* y producirán (derivarán) nuevas sentencias entre algunas *formas reconocibles correspondientes* (Remitase a la observación 1.1.1).

Observación 1.1.2. ◇ Podríamos pensar en esta diferenciación de los axiomas en tipo lógico o tipo ilógico como casos especiales de reglas, esto es, reglas que *no* reciben entradas con el fin de obtener un resultado. Des esta manera, el numeral (2) queda contenido en el numeral (3), y con ello somos leales a nuestra definición abstracta de teoría, donde no se mencionan los axiomas.

Un ejemplo, fuera del contexto matemático, de un *protocolo* de entrada es la orden invocada cuando se “teclea” **date** en el teclado del computador. Esta orden no recibe entrada, y muestra la fecha actual en la pantalla. ◇

Seguimos aproximándonos cuidadosamente a los lenguajes formales (de primer orden).

[7] El uso del término “verdadera” es para motivar. El concepto de “fórmula demostrable”, “fórmula deducible”, o “teorema” pronto será definido de manera precisa para reemplazar la expresión “proposición verdadera”.

Hay dos partes en cada abecedario de primer orden. La primera es la colección de *símbolos lógicos* y *es común a todos los lenguajes de primer orden* sin importar la teoría de la cual trate. Describiremos esta parte a continuación.

Símbolos Lógicos

SL-1. *Variables objeto o individuales*. Una *variable objeto* es cualquier símbolo (único) de la sucesión infinita $v_0, v_1, v_2, \ldots$. En la *práctica* –cuando usamos la Lógica como herramienta o como objeto de estudio– relajamos la notación y usamos, *comúnmente*, $x, y, z, v, w, x', y', v', z_0, v_0$ como *nombres* de variables objeto.[8] Es solo un problema de notación. Nosotros permitiremos escribir, por ejemplo, "z" en lugar de "$v_{1200000000560000009}$". Las variables objeto (intuitivamente) "varían sobre" los abjetos de la teoría que se estudia (números, conjuntos, átomos, líneas, puntos, etc., según sea el caso).

SL-2. *Los conectivos Booleanos o proposicionales*. Estan los símbolos "$\neg$" y "$\vee$". [9] que se pronuncian *no* y *o*, respectivamente.

SL-3. *El cuantificador existencial*. Es el símbolo "$\exists$", que se conoce como *existe, para algún(a)*.

SL-4. *Paréntesis*. Ellos son "(" y ")".

SL-5. *La igualdad (Predicado de igualdad)*. Es el símbolo "=", que usamos para indicar que dos objetos son iguales y se pronuncia *igual a*.

$\diamondsuit$ Los símbolos lógicos tendrán una interpretación fija. En particular "=" siempre significará *igual a*. $\diamondsuit$

La parte teórico-específica del alfabeto no es fija, pues varía de teoría a teoría. Por ejemplo, en teoría de números adoptamos los símbolos σ (significado: sucesor o función "$_1$"),$+,\times$. 0, <, y (algunas veces) un símbolo para la operación (función) exponenciación a^b. Los primeros tres son *símbolos funcionales* de aridades respectivas 1, 2 y 2. 0 es un *símbolo constante*, < un predicado de aridad 2, y cual sea el símbolo que introduzcamos para a^b debe tener aridad 2.

La siguiente lista nos da un panorama general.

Símbolos No-lógicos.

[8] Convenciones como esta son, en esencia, licencias –en la metateoría– para ser descuidado y salir impune. Aquí se dan por su facilitar el manejo.

[9] Los paréntesis no son parte del símbolo, sólo sirven para separar lo que si pertenece al símbolo y lo que no.

SNL-1. Un conjunto (posiblemente vacío) de simbolos *constantes*. Normalmente usaremos los metasímbolos[10] a, b, c, d, e, ya sea con o sin subíndices o apóstrofes, para representar constantes, amenos que tomemos en cuenta algunas notaciones formales alternativas, que sean de uso común para alguna teoría particular (ej, $\emptyset$, 0, ω).

SNL-2. Un conjunto (posiblemente vacío) de *símbolos de predicado o relacionales* para cada posible "aridad" $n > 0$. Normalmente usamos *P, Q, R* de forma genérica, para denotar símbolos de predicado. Observe que = está en el campo lógico. También observe que los símbolos formales de la teoría específica son posibles para predicados, e.g. $<, \in$.

SNL-3. Y, finalmente, un conjunto (posiblemente vacío) de *simbolos funcionales* para cada "aridad" posible $n > 0$. Usamos genericamente f, g, h, para denotar símbolos funcionales. Observe que los símbolos formales de la teoría específica son posibles para funciones, e.g. $+, \times$.

Definición 1.1.1. (Terminología acerca de expresiones). Una sucesión de símbolos, o *expresión* formada solamente usando los símbolos presentes en un conjunto M dado[11] es llamada *una expresión sobre el conjunto, o alfabeto, M*.

Si A y B denotan expresiones (digamos sobre M), entonces el símbolo $A * B$ o simplemente AB, denota la sucesión de símbolos obtenida al listar de izquierda a derecha primero primero los símbolos de A, seguidos inmediatamente por los símbolos de B. Decimos que AB es (mejor dicho, denota o nombra) la *concatenación* de las expresiones A y B, en ese orden.

Denotamos el hecho que dos expresiones (llamadas) C y D son *sucesiones idénticas* (pero sólo diremos que son *iguales*) como $C \equiv D$. La negación de lo anterior la denotaremos por $C \not\equiv D$. Así, si $\sharp$ y ? son (y queremos decir que "son") símbolos de un alfabeto, entonces

$$\sharp?? \equiv \sharp?? \qquad \text{pero} \qquad \sharp? \not\equiv \sharp??$$

Podemos emplear $\equiv$ en un contexto como "sea $A \equiv \sharp\sharp?$", cuando le damos el nombre A a la expresión $\sharp\sharp?$.[12]

$\diamondsuit$ A lo largo de este libro el simbolo $\equiv$ será *usado en la metateoría* para la igualdad de expresiones sobre algún conjunto M. $\diamondsuit$

[10] Los *meta*símbolos son símbolos *informales* (i.e. fuera del lenguaje formal) que usamos "a diario" dentro de la matemática "real" –la *meta*teoría– para describir el lenguaje formal.

[11] Un conjunto que proveé símbolos para construir expresiones no tiene nada de especial, essólo un conjunto. Sin embargo, tiene un nombre:"abecedario" o "alfabeto".

[12] Signos de puntuación como "." no son parte de la expresión. Para evitar este tipo de aclaraciones uno delimita las expresiones usando paréntesis. Por ejemplo, Si A representa la expresión $\sharp$, escribimos $A \equiv$ "$\sharp''$. No debemos escribir "A'', a menos que querramos escribir a una expresión cuyo único símbolo es A.

El símbolo λ normalmente denotará la *expresón vacía*, y para él postulamos su manera de funcionar para cualquier expresión A:

$$A \equiv A\lambda \equiv \lambda A \qquad \text{para cualquier expresión } A$$

Decimos que A *ocurre en* B*, o es una subexpresión de* B, sii hay expresiones C y D tales que $B \equiv CAD$.

Por ejemplo, "(" ocurre cuatro veces en la expresión (explícita) "$\neg()\vee)(($", *en las posiciones* $2,3,7,8$. Cada vez que esto pasa, tenemos *una ocurrencia* de "(" en "$\neg()\vee)(($".

Si $C \equiv \lambda$, decimos que A *es un prefijo de* B. Aún más, y si $D \not\equiv \lambda$, decimos entonces que A *es un prefijo propio de* B.

Definición 1.1.2. Términos. El conjunto de *términos*, **TERM**, es el *menor* conjunto de expresiones sobre el alfabeto $\mathscr{V}$ con las siguientes propiedades:

(1) Todos los elementos en **SL-1** o en **SNL-1**(x,y,z,a,b,c, etc.) están presentes en $\mathscr{V}$.

(2) Si f es una función[13] de aridad n y $t_1,t_2,...,t_n$ son elementos de $\mathscr{V}$, también lo es la expresión "$ft_1t_2...t_n$".

Los símbolos t,s y u con o sin subíndices o apóstrofes, denotarán términos arbitrarios. Como los estamos usando en el *metalenguaje* para "variar sobre" los términos, naturalmente les llamaremos metavariables. Tambien sirven –como variables– para la definición de la *sintaxis* de términos. Por esta razón son llamados tambien *variables sintácticas*.

Observación 1.1.3. $\diamondsuit$ (1) Muchas veces haremos abuso de notación y escribiremos $f(t_1,...,t_n)$ en vez de $ft_1...t_n$.

(2) La definición 1.1.2 es una *definición inductiva*.[14] Ella define terminos mas o menos "complicados" asumiendo que ya conocemos los términos más simples ya vistos. Esta es una técnica estándar empleada en la Matemática Real. Tendremos oportunidad de decir algo más sobre las definiciones inductivas –y su conveniencia– en un $\diamondsuit\diamondsuit$-comentario posterior.

(3) Aclararemos esta particular forma de definir términos a nuestra definición operante de una teoría (Dada inmediatamente antes de la observación 1.1.1, en términos de "Reglas de Formación"). El numeral (2) en la definición anterior dice, esencialmente, que podemos construir nuevos términos (a partir de otros)

[13] A veces diremos función en vez de símbolo funcional, constante en vez de símbolo constante y predicado o relación en vez de símbolo predicativo.

[14] Algunos matemáticos instisten en que las definiciones son *recursivas* y que las demostraciones son "inductivas". [Bourbaki(B), 1966] no hace eco de tal diferencia y les llama "*démostrations par récurrence*". Nosotros si haremos eco de la diferenciación, aunque no siempre.

aplicando la siguiente *regla general*: Elige un símbolo funcional arbitrario, digamos f. Este tiene una regla de formación específica asociada con la que, para un apropiado número n, de una lista ordenada de términos ya existentes, $t_1,...,t_n$, construiremos un nuevo término que consiste de f, seguido inmediatamente por la lista ordenada de términos dados.

Para ser específicos, supongamos que estamos trabajando en el lenguaje de la teoría de números. Hay un símbolo funcional disponible, $+$. La regla asociada a $+$ construye el término nuevo $+ts$ para cualesquiera términos obtenidos antes, t y s. Por ejemplo, $+v_1v_{13}$ y $+v_{121}+v_1v_{13}$ son términos bien formados. Normalmente escribimos tales términos en notación "infija",[15] i.e., $t+s$, v_1+v_{13} y $v_{121}+(v_1+v_{13})$ (observe la inclusión de paréntesis, para indicar la secuencia de aplicación de $+$).

Un subproducto de lo que acabamos de describir es que *la aridad de un símbolo funcional es la cantidad de términos que la regla asociada requiera como entradas*.

(4) Una frase crucial empleada en la definición anterior (que aparece en todas las definiciones inductivas) es *el menor*, y se aplica como en Teoría de Conjuntos en el sentido de la "contención". Por ejemplo, podemos facilmente pensar en un conjunto de expresiones que satiisfagan ambas condiciones en la definición anterior, pero que *no* sea el "menor", en virtud de presentar elementos adicionales, tales como la expresión "$\neg\neg($".

Meditación 1.1.1. *Porqué "$\neg\neg($" no está en el menor conjunto de la definición, y por ello no es un término?*

El lector puede desear pensar aún más la cuestión, considere un ejemplo familiar, el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$. El principio de inducción en $\mathbb{N}$ asegura la existencia de un conjunto que es *el menor* con las propiedades:

(i) 0 está incluido, y
(ii) si n esta incluido, también lo está $n+1$.

En contraste, los conjuntos $\mathbb{Z}$ (Enteros), $\mathbb{Q}$ (Racionales), $\mathbb{R}$ (Reales), también satisfacen (i) y (ii), pero claramente ninguno es "el menor". $\diamondsuit$

Definición 1.1.3. (Fórmulas Atómicas). El conjunto de *frmulas atómicas*, **Fa**, es aquel que consiste precisamente de:

(1) las expresiones $t = s$ para cualquier elección de términos t, s.

(2) Las expresiones $Pt_1...t_n$ para todas la elecciones posibles de símbolos de predicado n-arios (y para cualquier $n > 0$) y para todas las posibles elecciones de términos $t_1,...t_n$.

[15]El símbolo funcional es ubicado enmedio de los argumentos.

$\diamondsuit$ A menudo cometemos abusos de notación y escribiremos $P(t_1,...,t_n)$ en vez de $Pt_1...t_n$. $\diamondsuit$

Definición 1.1.4. (Fórmulas bien formadas). El conjunto de *fórmulas bien formadas*, **Fbf**, es *el menor* conjunto de expresiones sobre un alfabeto $\mathscr{V}$ con las siguientes propiedades:

(a) Todos los elementos de **Fa** están incluidos.

(b) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ denotan expresiones (sobre $\mathscr{V}$) que están incluidas, también lo están $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ y $(\neg \mathscr{A})$. item[(c)] Si $\mathscr{A}$ denota una expresión que está incluida y x es una variable objeto (*que puede o no ocurrir en* $\mathscr{A}$ (como subexpresión)), entonces la expresión $((\exists x)\mathscr{A})$ también lo está, y decimos que $\mathscr{A}$ es el *alcance (amplitud o ámbito)* de $(\exists x)$

Una variable que esta cuantificada *es acotada en el alcance del cuantificador*. A variables sin cuantificar son *libres*. A continuación daremos, por inducción sobre las fórmulas, definiciones (metamatemáticas) precisas de "libre" y "acotada".

Definición 1.1.5. Variables libres y variables acotadas. Una variable objeto x *ocurre libre* en un término t o fórmula atómica $\mathscr{A}$ sii ella ocurre en t o aparece en $\mathscr{A}$ como subexpresión (ver definición 1.1.1).

x ocurre libre en $(\neg \mathscr{A})$ sii ocurre libre en $\mathscr{A}$.

x ocurre libre en $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ sii ocurre libre en alguuna, es decir, en $\mathscr{A}$ o en $\mathscr{B}$.

x ocurre libre en $((\exists y)\mathscr{A})$ sii x ocurre libre en $\mathscr{A}$, y y es una variable *distinta* de x.[16]

La variable y en $((\exists y)\mathscr{A})$ *no* es, desde luego, libre –aunque pueda serlo en $\mathscr{A}$– como acabamos de concluir en esta definición inductiva. Decimos que ella, (y), *es acotada* en $((\exists y)\mathscr{A})$. Evidentemente, términos y fórmulas atómicas no tienen variables acotadas.

Observación 1.1.4. $\diamondsuit$ **(1)** Por supuesto, la definición 1.1.5 se ocupa de los conectivos definidos, via el procedimiento obvio de traducción.

(2) *Notación.* Si $\mathscr{A}$ es una fórmula, a menudo escribiremos $\mathscr{A}[y_1,...,y_k]$ para indicar nuestro interés en las variables $y_1,...,y_k$, que pueden o no ocurrir libres en $\mathscr{A}$. Es más, es posible que haya otras variables libres en $\mathscr{A}$ que podríamos decidir no incluir en esa lista.

Por otra parte, si usamos paréntesis , como en $\mathscr{A}(y_1,...y_k)$, estamos implícitamente afirmando que $y_1,...y_k$ es la *lista completa* de variables libres que aparecen (ocurren) en $\mathscr{A}$. $\diamondsuit$

[16] Hay que recordar que x y y son abrevaciones de nombres como $v_{1200098}$ y v_{11009} (que nombran a variables distintas). Sin embargo, podría ser que x y y nombren a la misma variable. Por tanto, no es redundante decir "y y es una variable *distinta* de x". Por cierto, esto se abrevia como $x \not\equiv y$, en virtud de la definición 1.1.1

Definición 1.1.6. Un término o fórmula es *cerrada* sii no ocurren variables libres en ella. Una fórmula cerrada es llamada un *enunciado*.

Una fórmula es *abierta* sii no "aparecen" cuantificadores en ella (de esta manera una fórmula puede ser abierta y cerrada a la vez).

1.2. Axiomas Y Reglas De Inferencia

Ahora que tenemos nuestro lenguaje, $\mathscr{L}$, nos aventuraremos a usarlo formalmente, efectuando *deducciones*. Tales deducciones empiezan por los *axiomas*. Las deducciones emplean reglas puramente sintácticas -i.e. basadas en *la forma*, no en *el significado*- "aceptables", que nos permiten escribir (*deducir*) una fórmula por el sólo hecho de que otras fórmulas *sintácticamente relacionadas con aquella* fueron ya deducidas (i.e. *escritas*). Tales reglas de manipulación de expresiones son llamadas *reglas de inferencia*.

Iniciamos con la definición exacta de *tautologías* en nuestro lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$.

Definición 1.2.1. Fórmulas primas en Fbf. Variables proposicionales. Una fórmula $\mathscr{A} \in$ **Fbf** es una *fórmula prima* o una *variable proposicional* sii es de alguno de los siguientes tipos:

Pri1 $\mathscr{A}$ es atómica.

Pri2 $\mathscr{A}$ es de la forma $((\exists x)\mathscr{A})$.

Usaremos letras minúsculas p, q, r, p', q', r' (con o sin subíndices) para denotar fórmulas primas arbitrarias (variables proposicionales) de nuestro lenguaje.

◊ Así las cosas, una fórmula prima o no tiene cuantificadores o, si los tiene, se esconden en el ámbito de $(\exists x)$.

Podemos pensar a una variable proposicional como una "mancha" que un miope distingue en vez de una fórmula como las descritas en 1.2.1. El mismo miope ve una fórmula bien formada como un montón de manchas, paréntesis y conectivos booleanos $(\neg, \vee)$ "asociados correctamente" de acuerdo a la siguiente definición.[17] ◊

Definición 1.2.2. Fórmulas Proposicionales. El conjunto de fórmulas proposicionales sobre $\mathscr{V}$, **Prop**, es el conjunto más pequeño tal que:

(1) Toda variable proposicional (sobre $\mathscr{V}$) pertenece a **Prop**.

[17] Es interesante que *nuestro* miope pueda ver los paréntesis y los conectivos booleanos.

(2) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ pertenecen a **Prop**, entonces $\neg\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$ también pertencen a **Prop**.

Metateorema 1.2.1. Prop = Fbf.

Demostración. ($\subseteq$) Por inducción sobre **Prop**. Todo elemento listado en 1.2.2(1) está en **Fbf**. Además, **Fbf** cumple la definición 1.2.2(2) (ver def. 1.1.4(b)).
($\supseteq$) Por inducción sobre **Fbf**. Todo elemento en def. 1.1.4(a) es una variable proposicional (sobre $\mathscr{V}$), por lo que está en **Prop**.
Prop satisface def. 1.1.4(b) de manera trivial. También satisface def. 1.1.4(c); si $\mathscr{A}$ está en **Prop**, también está en **Fbf**. Entonces, por definición 1.2.1, $((\exists x)\mathscr{A})$ es una variable prposicional, por lo que está en **Prop**. ☐

Definición 1.2.3. Valuaciones Proposicionales. Podemos asignar de manera arbitraria un valor, ya sea 0 o 1, a cualquier elemento de **Ffb** (o **Prop**) como sigue:

(1) Fijamos una asignación, 0 o 1, a *toda fórmula prima*. Podemos pensar que estamos tomando una funcioón arbitraria v en la metateoría y la fijamos, $v : \{\text{todas las fórmulas primas sobre } \mathscr{V}\} \to \{0,1\}$.

(2) Definimos por recursión *una extensión de* v, denotada como $\bar{v}$:

$$\begin{aligned}\bar{v}(\neg\mathscr{A}) &= 1-\bar{v}(\mathscr{A})\\ \bar{v}(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}) &= \bar{v}(\mathscr{A})\cdot\bar{v}(\mathscr{B})\end{aligned}$$

donde "·" denota la multiplicación usual.

Tradicionalmente llamamos "verdadero" y "falso" a los valores 0 y 1, los denotamos **t** y **f** respectivamente.
Por otra parte, v también es conocida como una *asignación (valor) de verdad*.
Usamos la expresión "$\mathscr{A}$ toma el valor de verdad **t** (resp. **f**) bajo la valuación v" para decir "$\bar{v}(\mathscr{A})=0$ (resp. $\bar{v}(\mathscr{A})=1$)".

◊ La definición anterior de $\bar{v}$ recae en en el hecho que la definición 1.2.2 de **Prop** es inequívoca (def. **??**) o en que una fórmula proposicional tiene *una única lectura (análisis)* (ver ejercicios **??** y **??**). Además emplea el metateorema **??** (Definición por Recursión).

El lector podría pensar que todo lo dicho sobre tener una única lectura es una sutileza sin importancia cuando, en realidad, puede ser un asunto de vida o muerte. El antiguo oráculo de Delfos tenía el mal hábito de emitir pronunciamientos ambiguos (con mas de una lectura). Uno de tales pronunciamientos, en Inglés, dice; *"You will go you will return not dying in the war"*.[18] Ya que los

[18]El original fue: "*Ιξεις αφιξεις ου θνηξεις εν πολεμω*".

antiguos griegos no usaban signos de puntuación, la frase anterior tienen dos significados diametralmente opuestos, dependiendo si ponemos una coma *antes* o *después* de "not".

La situación con las fórmulas en **Prop** podría ser desastroza en ausencia de los paréntesis –que sirven como signos de puntuación– ya que no tendríamos asegurada una única lectura para cada fórmula: Por ejemplo, para tres fórmulas primas distintas p, q, r podemos encontrar una asignación v tal que $\bar{v}(p \to q \to r)$ es *diferente* dependiendo del uso de paréntesis alrededor de "$p \to q$" o de "$q \to r$" (encuentre una de tales asignaciones). $\diamondsuit$

Observación 1.2.1. $\diamondsuit$ Tablas de Verdad La definición 1.2.3 se da a menudo en términos de *funciones de verdad*. Por ejemplo, podríamos haber definido (obviamente en la metateoría) la función $F_\neg : \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\} \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ como

$$F_\neg(x) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{si} \quad x = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \text{si} \quad x = \mathbf{t} \end{cases}$$

Entonces podríamos decir que $\bar{v}((\neg\mathscr{A})) = F_\neg(\bar{v}(\mathscr{A}))$. Podemos hacer lo mismo con todos los conectivos ($\vee$ y las abreviaciones) con ayuda de las funciones de verdad $F_\vee, F_\wedge, F_\to, F_\leftrightarrow$. Tales funciones se dan convenientemente a continuación por medio de las llamadas *tablas de verdad*:

x	y	$F_\neg(x)$	$F_\vee(x,y)$	$F_\wedge(x,y)$	$F_\to(x,y)$	$F_\leftrightarrow(x,y)$
f	**f**	**t**	**f**	**f**	**t**	**t**
f	**t**	**t**	**t**	**f**	**t**	**f**
t	**f**	**f**	**t**	**f**	**f**	**f**
t	**t**	**f**	**t**	**t**	**t**	**t**

$\diamondsuit$

Definición 1.2.4. Tautologías, Fórmulas Satisfacibles, Fórmulas no Satisfacibles en Fbf. Una fórmula $\mathscr{A} \in \mathbf{Fbf}$ (o bien en **Prop**) es una *tautología* sii para cualquier valuación v se tiene que $\bar{v}(\mathscr{A}) = \mathbf{t}$.

Llamamos **Taut** al conjunto de tautologías. Usamos $\models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}$ para simbolizar "$\mathscr{A}$ es una tautología".

Una fórmula $\mathscr{A} \in \mathbf{Fbf}$ (o bien en **Prop**) es *satisfacible* sii hay alguna asignación de verdad v tal que $\bar{v}(\mathscr{A}) = \mathbf{t}$. En tal caso decimos que v *satisface a* $\mathscr{A}$.

Un *conjunto* Γ de fórmulas es satisfacible sii hay alguna valuación v con la cual $\bar{v}(\mathscr{A}) = \mathbf{t}$ para cualquier $\mathscr{A} \in \Gamma$. Decimos que v satisface a Γ.

Una fórmula $\mathscr{A} \in \mathbf{Fbf}$ (o bien en **Prop**) es *no satisfacible* sii para cualquier valuación v se tiene que $\bar{v}(\mathscr{A}) = \mathbf{f}$. Una *conjunto* Γ de fórmulas es no satisfacible sii para toda valuación v, hay alguna $\mathscr{A} \in \Gamma$ tal que $\bar{v}(\mathscr{A}) = \mathbf{f}$.

Definición 1.2.5. Implicación Tautológica para Fórmulas en Fbf. Sea $\mathscr{A}$ una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas (sobre $\mathscr{L}$. Decimos que "Γ implica tautológicamente a $\mathscr{A}$", y lo denotamos como $\Gamma \models \mathscr{A}$, sii *cualquier asignación de verdad v que satisface a Γ también satisface a $\mathscr{A}$.*

$\diamondsuit$ Hemos definido los conceptos de "satisfacibilidad" y "no satisfacilibilidad" en un sentido *proposicional* o *booleano*. Los mismos conceptos tienen un significado más complejo cuando decidimos "ver" las variables objeto y los cuantificadores que ocurren en las fórmulas. $\diamondsuit$

Tenemos a su vez el siguiente lema.

Lema 1.2.1. [19] $\Gamma \models \mathscr{A}$ *sii* $\Gamma \cup \{\neg\mathscr{A}\}$ *es un conjunto de fórmulas no satisfacible (en el sentido proposicional).*

$\diamondsuit$ Si $\Gamma = \emptyset$, $\Gamma \models \mathscr{A}$ es lo mismo que $\models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}$, pues la hipótesis "cualquier asignación de verdad v que satisface a Γ", en la definición anterior, se cumple por vacuidad. Por esta razón usamos $\models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}$ en vez de $\Gamma \models \mathscr{A}$. $\diamondsuit$

Problema 1.2.1. $\diamondsuit$ Dada una fórmula $\mathscr{A}$ y dos valuaciones v, v', se tiene que $\bar{v}(\mathscr{A}) = \bar{v}'(\mathscr{A})$ si v y v' coinciden en todas las variables proposicionales que ocurren en $\mathscr{A}$.

De la misma manera, las valuaciones v que no afectan a las variables que ocurren en Γ y en $\mathscr{A}$ tampoco afectan a $\Gamma \models \mathscr{A}$ (ejercicio **??**). $\diamondsuit$

Antes de hablar de los axiomas, trataremos de definir la noción de *sustitución*.

Definición 1.2.6. Sustitución de Términos (Tentativo). Sea $\mathscr{A}$ una fórmula, x una variable (objeto) y t un término. Denotamos al resultado de "reemplazar" *todas las ocurrencias libres de x en $\mathscr{A}$ por el término t, cuidando que ninguna variable de t quede "capturada" (por un cuantificador) durante la sutitución* como $\mathscr{A}[x \leftarrow t]$.

Si esto último es posible, decimos que "t es *sustituto para x* (en $\mathscr{A}$)", o que "t es *libre para x* (en $\mathscr{A}$)". La sustitución es *indefinida* cuando ello no es posible.

Observación 1.2.2. La definición 1.2.6 tiene algunos problemas que necesitan discutirse o clarificarse.

Algunas personas (¿personas razonables‽) estarán satisfechas con la definición "así como está". Sin embargo, hay algunas zonas oscuras (que quedaron señaladas con comillas).

[19] La palabra "lema" (en griego $\lambda\acute{\eta}\mu\mu\alpha$, pl. $\lambda\acute{\eta}\mu\mu\alpha\tau\alpha$) proviene del verbo "$\lambda\alpha\mu\beta\acute{\alpha}\nu\omega$" (tomar) y quiere decir "cosa dada o necesaria". En matemáticas, un lema es una proposición auxiliar demostrable, utilizada dentro de argumentaciones matemáticas más extensas –invocándolos por su nombre, como en "... por el lema tal"– de manera similar a como las "subrutinas" son usadas en los programas computacionales mas largos. De esta manera, el propósito de los lemas para nosotros es acortar las pruebas, dividiéndolas en módulos.

(1) ¿Qué quiere decir “capturar”? Supongamos que $\mathscr{A} \equiv (\exists x)\neg x = y$. Sea $t \equiv x$.[20] Así $\mathscr{A}[y \leftarrow t] \equiv (\exists x)\neg x = x$, que dice algo totalmente distinto del original. Esto es inesperado (e indeseable); $\mathscr{A}$ dice algo sobre la variable libre y, i.e. sobre todos los objetos que pueden ser “valores” (o significados) de y. Uno hubiese esperado que, en particular, $\mathscr{A}[y \leftarrow x]$ –Si tal sustitución fuera posible– diría lo mismo acerca de los valoresde x. No lo hace.[21] Lo que sucede es que *x fue cpturada por el cuantificador* en la sustitución, distorsionando así el significado original de $\mathscr{A}$.

(2) ¿“Reemplazar” tiene un significado matemático preciso?

(3) Si $\mathscr{A}$ es una fórmula, ¿Lo es $\mathscr{A}[x \leftarrow t]$?

Una reformulación de la definición 1.2.6, por medio de una recursión (sobre términos y fórmulas) resuelve al momento los puntos anteriores (en particular, desaparacen las nociones “reemplazar” y “capturar”). A continuación hacemos lo anterior para cualquier fórmula $\mathscr{A}$, variable$x$ y término t;

En primer lugar definiremos $s[x \leftarrow t]$, cuando s es un término, por casos:

$$s[x \leftarrow t] \equiv \begin{cases} t & \text{si } x \equiv s \\ a & \text{si } s \equiv a,\ a \text{ es un símbolo constante.} \\ y & \text{si } s \equiv y,\ y \text{ es una variable distinta de } x. \\ f r_1[x \leftarrow t] r_2[x \leftarrow t] \ldots r_n[x \leftarrow t] & \text{si } s \equiv f r_1 r_2 \ldots r_n \end{cases}$$

Meditación 1.2.1. ¿$s[x \leftarrow t]$ siempre es un término? Que esto sea así se demuestra fácilmente por inducción sobre los términos, usando la reciente definición por casos y como hipótesis inductiva que $r_1[x \leftarrow t], \ldots, r_n[x \leftarrow t]$ son términos.

Ahora definimos sustitución para fórmulas. Los símbolos P, r, s (con o sin subíndices) denotarán un símbolo predicativo n-ario, un término y otro término, respectivamente:

$$\mathscr{A}[x \leftarrow t] \equiv \begin{cases} s[x \leftarrow t] = r[x \leftarrow t] & \text{si } \mathscr{A} \equiv s = r \\ P r_1[x \leftarrow t] r_2[x \leftarrow t] \ldots r_n[x \leftarrow t] & \text{si } \mathscr{A} \equiv P r_1 r_2 \ldots r_n \\ \mathscr{B}[x \leftarrow t] \vee \mathscr{C}[x \leftarrow t] & \text{si } \mathscr{A} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \\ (\neg(\mathscr{B}[x \leftarrow t])) & \text{si } \mathscr{A} \equiv (\neg \mathscr{B}) \\ \mathscr{A} & \text{si } \mathscr{A} \equiv ((\exists y)\mathscr{B}) \text{ con } y \equiv x \\ ((\exists y)(\mathscr{B}[x \leftarrow t])) & \text{si } \mathscr{A} \equiv ((\exists y)\mathscr{B}) \text{ con } y \not\equiv x \\ & \quad \text{y } y \text{ no ocurre en } t \end{cases}$$

[20] Recordar que en la definición 1.1.1 hemos dicho que “$\equiv$” se usa para la igualdad de expresiones.

[21] $\mathscr{A}$ dice que (para el objeto y) existe un objeto x que es distinto del objeto y. $\mathscr{A}[y \leftarrow x]$ dice que hay un objeto que es distinto de sí mismo.

En todos los casos, el lado zquierdo de la "igualdad" está definido sii el lado derecho lo está.

Meditación 1.2.2. Hemos eliminado las nociones de "reemplazar" y "capturar", pero, cuando $\mathscr{A}[x \leftarrow t]$ puede ser definido, ¿Es una fórmula? (ver ejercicio **??**) ♢

Definición 1.2.7. Sustitución Simultánea. El símbolo

$$\mathscr{A}[y_1,\ldots,y_r \leftarrow t_1,\ldots,t_r]$$

o bien $\mathscr{A}[\vec{y}_r \leftarrow \vec{t}_r]$ –$\vec{y}_r$ abrevia a $y_1,\ldots,y_r$ y $\vec{t}_r$ abrevia a $t_1,\ldots,t_r$– denota la *sustitución simultánea* de los términos $t_1,\ldots,t_r$ en las variables $y_1,\ldots,y_r$, de la siguiente manera: Sean $\vec{z}_r$ variables que no ocurren en $\mathscr{A}$ ni en $\vec{t}_r$ (ya sea de forma libre o acotada). Entonces $\mathscr{A}[\vec{y}_r \leftarrow \vec{t}_r]$ es la abreviatura de

$$\mathscr{A}[y_1 \leftarrow z_1]\ldots[y_r \leftarrow z_r][z_1 \leftarrow t_1]\ldots[z_r \leftarrow t_r] \tag{1.1}$$

♢ El ejercicio **??** muestra que podemos obtener la expresión 1.1 sin importar la elección de las *nuevas variables* $\vec{z}_r$.

Convenciones. El símbolo $[x \leftarrow t]$ está en el metalenguaje. Este metasímbolo tiene alta jerarquía, de modo que, e.g., $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}[x \leftarrow t]$ significa $\mathscr{A} \vee (\mathscr{B}[x \leftarrow t])$, $(\exists x)\mathscr{B}[x \leftarrow t]$ significa $(\exists x)(\mathscr{B}[x \leftarrow t])$, etcétera.

El lector debe recordar las convenciones respecto a las metanotaciones $\mathscr{A}[\vec{x}_r]$ y $\mathscr{A}(\vec{x}_r)$ (ver observación 1.1.4). En ese contexto, si $t_1,\ldots,t_r$ son términos, el símbolo $\mathscr{A}[t_1,\ldots,t_r]$ abrevia a $\mathscr{A}[\vec{y}_r \leftarrow \vec{t}_r]$. ♢

Ya estamos listos para hablar de axiomas (lógicos) y reglas de inferencia.

♢ **Esquemas.** De hecho, algunos de los axiomas a considerar son *esquemas*. Un *esquema de fórmula* es una expresión $\mathscr{G}$, en el metalenguaje, que contiene *variables sintácticas* ($\mathscr{A}, P, f, a, t, x$).

Cuando reemplazamos todas las variables sintáticas que ocurren en $\mathscr{G}$ por fórmulas,símbolos predicativos, símbolos funcionales, constantes o variables específicos (resp.), obtenemos una fórmula bien formada específica, tambíen llamada una *instancia del esquema*. Por ejemplo, una instancia de $(\exists x)x = a$ es $(\exists v_{12})v_{12} = 0$ (en el lenguaje de la aritmética de Peano). Una instancia de $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es $v_{101} = v_{114} \to v_{101} = v_{114}$. ♢

Definición 1.2.8. Axiomas y Esquemas Axiomáticos. Los *axiomas lógicos* son *todas* las fórmulas en el grupo **Ax1** y *todas* las posibles instancias de los esquemas en los grupos restantes:

Ax1 Todas las fórmulas en **Taut**.

Ax2 *(Esquema)*

$$\mathscr{A}[x \leftarrow t] \rightarrow (\exists x)\mathscr{A} \text{ para cualquier término } t$$

$\diamondsuit$ Por la definición 1.2.6 y la observación 1.2.2 hay una condición impuesta sobre t, que sea sustituto para x. $\diamondsuit$

N.B.[22] A menudo escribimos lo anterior como

$$\mathscr{A}[t] \rightarrow (\exists x)\mathscr{A}[x]$$

incluso como

$$\mathscr{A}[t] \rightarrow (\exists x)\mathscr{A}$$

Ax3 *(Esquema)* Para *cada* variable objeto x, la fórmula $x = x$.

Ax4 *(Esquema. Caracterización de la Igualdad de Leibniz, versión para Primer Orden.)* Para cualquier fórmula $\mathscr{A}$, variable objeto x, y términos s, t, la fórmula

$$t = s \rightarrow (\mathscr{A}[x \leftarrow t] \leftrightarrow \mathscr{A}[x \leftarrow t])$$

N.B. Lo anterior usualmente se escribe como

$$t = s \rightarrow (\mathscr{A}[t] \leftrightarrow \mathscr{A}[s])$$

Cabe mencionar que la notación también requiere que t y s sean libres para x.

Denotaremos al conjunto de axiomas lógicos así definido como Λ.

$\diamondsuit\diamondsuit$ Los axiomas lógicos para la igualdad no son lo más general posible, pero son adecuados para nuestro enfoque. El esquema que Leibniz *realmente* propuso era $t = s \leftrightarrow (\forall P)(P[t] \leftrightarrow P[s]$, que de manera intuitiva dice; "dos objetos son iguales sii, para cualquier propiedad P, ambos objetos tienen la propiedad o ninguno de ellos la tiene".

Desafortunadamente, nuestro sistema notacional (un lenguaje de primer orden) no permite cuantificar sobre símbolos predicativos (que pueden "variar" sobre "propiedades" arbitrarias). Pero **Ax4** dice " para todas las fórmulas $\mathscr{A}$" ¿No? Si, pero con un detalle; "para todas las fórmulas $\mathscr{A}$ *que podamos escribir (deducir) en nuestro sistema notacional*, y, por desgracia, no podemos escribir *todas* las fórmulas posibles de las *matemáticas reales*, pues son demasiadas.[23]

[22] "Nota Bene"; Ten cuidado, fíjate bien, lee cuidadosamente.

[23] "Una cantidad no numerable", en un sentido técnico preciso desarrollado en el capítulo de cardinalidad del volumen 2 (ver página 62 de este volumen para un "curso express" sobre cardinalidad). Esto se debe al teorema de Cantor, que implica la existencia de una cantidad no numerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Cada subconjunto A da lugar a la fórmula $x \in A$ (en el

Aunque el símbolo "=" sugiere igualdad, no es por su forma que califica como igualdad. Son dos axiomas, **Ax3** y **Ax4**, los que hacen que el símbolo "=" se comporte como esperamos que se comporte la igualdad, y que cualquier otro símbolo, sin importar su apariencia (e.g. [Enderton, 1972] usa "≈"), que satisfaga esos dos axiomas *califique* como *igualdad formal* para intentar codificar el estándar metamatemático "=". ◇◇

Observación 1.2.3. En **Ax2** y **Ax4** se impone la condición que t (y s) debe ser sustituto para x y es por la siguiente razón:

Sea $\mathscr{A} \equiv (\forall y)x = y$ y sea $\mathscr{B} \equiv (\exists y)\neg x = y$. Olvidando *momentáneamente la restricción sobre la sustitución*, tenemos que $\mathscr{A}[x \leftarrow y] \to (\exists x)\mathscr{A}$ es

$$(\forall y)y = y \to (\exists x)(\forall y)x = y$$

y tenemos que $x = y \to (\mathscr{B} \leftrightarrow)\mathscr{B}[x \leftarrow y])$ es

$$x = y \to ((\exists y)\neg x = y \leftrightarrow (\exists y)\neg y = y)$$

ninguna de las cuales es, obviamente, "válida".[24]

Hay una manera, metamatemática, de remediarlo: Sacar de peligro a las variables cuantificadas, renombrandolas de tal forma que ninguna variable cuantificada en $\mathscr{A}$ tenga el mismo nombre que cualquier variable (libre, por supuesto) en t (o s).

Este "re-etiquetado" es formalmente correcto (i.e. no cambia el significado de la fórmula), como veremos en (meta)teorema 1.4.13 (faltaref). Siempre es posible efectuar este reetiquetado, pues contamos con una cantidad numerable de variables, pero solo aparecen libres en t (y en s) y en $\mathscr{A}$ una cantidad finita. esta solución trivial nos permite hacer menos peligrosas las condicionantes en **Ax2** y **Ax4**. Esencialmente, un término es sustituto tras el cambio de nombre.

◇ Es costumbre el platonismo (metateórico), y nosotros lo asumiremos. Así, podemos decir "una cantidad numerable" de variables sin inmutarnos. Como alternativa; sabemos como obtener una nueva variable que sea diferente de todas las variables dadas en un conjunto finito sin hacer referencia a una provisión *infinita*. ◇

---

metalenguaje).
Por otro lado, el sistema notacional formal de la teoría de conjuntos, usando solamente $\in$ y U como símbolos (no lógicos) iniciales, alcanza para escribir una cantidad infinita, pero numerable, de fórmulas. Así, nuestra notación no alcanzará para escribir una cantidad no numerable de "fórmulas de verdad" $x \in A$.

[24] Basta con la noción intuitiva de validez. Próximamente se definirá cuidadosamente tal concepto.

Definición 1.2.9. Reglas de Inferencia. A continuación presentamos las dos *reglas de inferencia*. Son relaciones en el sentido de la sección **??**, con entradas en el conjunto **Fbf** y salidas en el mismo conjunto. Por tradición se denotan como "fracciones", donde el "numerador" son las *premisas* y el "denominador" es la *conclusión*.

Decimos que una regla de inferencia *es aplicada a* la(s) fórmula(s) en el numerador y *entrega* (o *da por resultado*) la fórmula en el denominador.

Inf1 *Modus Ponens*, o *MP*. Para cualesquiera fórmulas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$,

$$\frac{\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}}{\mathscr{B}}$$

Inf2 $\exists$-*cuantificación* (cuantificación existencial). Para cualesquiera fórmulas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ tales que x no ocurra libre en $\mathscr{B}$,

$$\frac{\mathscr{A} \to \mathscr{B}}{(\exists x)\mathscr{A} \to \mathscr{B}}$$

N.B. Cabe recordar las convenciones hechas acerca de la eliminación de paréntesis.

$\diamondsuit$ Es evidente que la definición anterior cumple nuestro requerimiento de que las reglas de inferencia sean "algoritmicas", en el sentido de que *su aplicación* o *como llevar a cabo* su aplicación pueden decidirse yverificarse en un numero finito de pasos, tan solo con mirar la *forma* de las fórmulas (entradas potenciales), sin importar el significado de tales fórmulas. $\diamondsuit$

A continuación definimos los Γ-teoremas, es decir, fórmulas que podemos probar *a partir* del *conjunto* de fórmulas Γ (que puede ser vacío).

Definición 1.2.10. Γ-Teoremas. El conjunto de Γ-*teoremas*, $\mathbf{Thm}_\Gamma$, es el menor subconjunto de **Fbf** (en el sentido de la contención) que satisface:

Th1 $\Lambda \subseteq \mathbf{Thm}_\Gamma$.

Th2 $\Gamma \subseteq \mathbf{Thm}_\Gamma$. Cualquier elemento de Γ es un *axioma no lógico*.

Th3 $\mathbf{Thm}_\Gamma$ es *cerrado bajo cada una de las reglas* **Inf1-Inf2**.

Por tradición, la expresión metalingüística $\mathscr{A} \in \mathbf{Thm}_\Gamma$ se denota como $\Gamma \vdash \mathscr{A}$, y decimos que $\mathscr{A}$ *se demuestra desde* Γ o que $\mathscr{A}$ *es un* Γ-*teorema*.

También decimos que $\mathscr{A}$ *se deduce a partir de* Γ o que Γ *deduce a* $\mathscr{A}$.

Si $\Gamma = \emptyset$, escribimos $\vdash \mathscr{A}$ en vez de $\emptyset \vdash \mathscr{A}$. En este caso es usual decir que $\mathscr{A}$ es *absolutamente demostrable* (o *demostrable sin axiomas no lógicos*).

A menudo escribimos $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots, \mathscr{D} \vdash \mathscr{E}$ en vez de $\{\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots, \mathscr{D}\} \vdash \mathscr{E}$

Definición 1.2.11. Γ-Pruebas. Acabamos de decir que $\mathbf{Thm}_\Gamma$ es $Cl(\mathscr{T},\mathscr{R})$ (la cerradura deductiva deΓ bajo T y $\mathscr{R}$), donde $\mathscr{T}$ es el conjunto de todos los axiomas lógicos y no lógicos, y $\mathscr{R}$ está conformado sólo por las dos reglas de inferencia. Una Γ-*prueba* (o prueba, si queda claro quien es Γ) es una $(\mathscr{T},\mathscr{R})$-derivación.

Observación 1.2.4. $\diamondsuit$ **(1)** Es evidente que si cada una de las siguientes fórmulas $\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_n$ tiene una Γ-prueba y $\mathscr{B}$ tiene una $\{\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_n\}$-prueba, entonces $\mathscr{B}$ tiene una Γ-prueba. De hecho, con sólo contcatenar todas las Γ-pruebas dadas (en cualquier orden), y al final agregar la $\{\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_n\}$-prueba. De esta forma tenemos una Γ-prueba que termina en $\mathscr{B}$.

Nos referimos a este fenómeno como la *transitividad de* $\vdash$.

N.B. La transitividad de $\vdash$ nos permite invocar *teoremas* demostrados anteriormente (por quien sea) en el transcurso de una prueba. Así pues, *prácticamente*, una Γ-prueba es una secuencia de fórmulas, en la que cada una es o un axioma, o un Γ-teorema conocido o se obtiene por la aplicación de una regla de inferencia sobre fórmulas previas en la secuencia.

(2) Si $\Gamma\subseteq\Delta$ y $\Gamma\vdash\mathscr{A}$, entonces $\Delta\vdash\mathscr{A}$ (por las definiciones 1.2.10 y 1.2.11).

(3) De las definiciones, es inmediato que para cualesquiera fórmulas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$,

$$\mathscr{A},\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash\mathscr{B}$$

y si, además, x no ocurre libre en $\mathscr{B}$,

$$\mathscr{A}\to\mathscr{B}\vdash(\exists x)\mathscr{A}\to\mathscr{B}$$

Algunos textos (e.g. [Schütte, 1977]) presentan las reglas de inferencia en esta forma. $\diamondsuit$

Los axiomas y reglas de inferencia nos proporcionan un *cálculo*, es decir, una madera para "calcular" pruebas y teoremas. Con el próposito de hacer este cálculos mas amigable –y por ello mas fácilmente aplicable a las teorías matemáticas interesantes, como la aritmética de Peano o la Teoría de Conjuntos– desarrollaremos algunos *principios secundarios* en la siguiente sección. Estos principios son, en gran medida, de la forma $\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_n\vdash\mathscr{B}$. Llamaremos a tales principios (demostrables en la metateoría) *reglas de inferencia secundarias* , ya que, por la transitividad de $\vdash$, pueden ser usadas como "pruebas de paso" dentro de una Γ-prueba. Por el contrario, las reglas **Inf1** y **Inf2** son"básicas" o "primarias"; se dan directamente.

$\diamondsuit$ Ahora nos podemos concentrar en el concepto de *teoría formal o matemática*.

Una *teoría formal (matemática) de primer orden* sobre un lenguaje $\mathscr{L}$, o simplemente *una teoría sobre* $\mathscr{L}$ es una secuencia (de "ingredientes") $\mathfrak{T}=(\mathscr{L},\Lambda,\mathbf{I},\mathscr{T})$, donde $\mathscr{L}$ es un lenguaje de primer orden, Λ es un conjunto de *axiomas lógicos*,

I es un conjunto de reglas de inferencia, y $\mathscr{T}$ es un subconjunto *no vacío* de **Fbf** que contiene a Λ (i.e. $\Lambda \subseteq \mathscr{T}$) y es cerrado bajo las reglas **I**.

De manera equivalente, uno puede pedir que $\mathscr{T}$ *sea cerrado bajo* $\vdash$, es decir, que para *cualquier* $\Gamma \subseteq \mathscr{T}$ y cualquier fórmula $\mathscr{A}$, si $\Gamma \vdash \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{A} \in \mathscr{T}$. Además, esto es equivalente a pedir que

$$\mathscr{A} \in \mathscr{T} \qquad \text{sii} \qquad \mathscr{T} \vdash \mathscr{A} \tag{1.2}$$

En realidad, la "ida" se sigue de la cerradura bajo $\vdash$, mientras que el "regreso" es consecuencia de la definición 1.2.10.

Γ es el conjunto de fórmulas *de la teoría*,[25] y a menudo diremos "una teoría $\mathscr{T}$", dando todo lo demás por sentado.

Si $\mathscr{T}$ =**Fbf**, entonces la teoría $\mathfrak{T}$ es *inconsistente* o *contradictoria*. En otro cado diremos que $\mathfrak{T}$ es consistente.

A lo largo de nuestra exposición, fijaremos Λ y **I** como en las definiciones 1.2.8 y 1.2.9.

De la equivalencia 1.2 se tiene que $\mathscr{T} = \mathbf{Thm}_{\mathscr{T}}$, lo que sugiere que llamemos *teorías axiomáticas* a teorías como las que acabamos de definir, en las que simpre hay un conjunto Γ tal que $\mathscr{T} = \mathbf{Thm}_{\Gamma}$ (en el peor de los casos, podemos tomar $\Gamma = \mathscr{T}$).

Estamos interesados principalmente en teorías $\mathfrak{T}$ para las que existe un conjunto "pequeño" Γ (pequeño en comparación com $\mathscr{T}$) tal que $\mathscr{T} = \mathbf{Thm}_{\Gamma}$. Decimos entonces que $\mathfrak{T}$ está *axiomatizada* por Γ o que Γ axiomatiza a $\mathfrak{T}$. Naturalmente, llamamos a $\mathscr{T}$ el *conjunto de teoremas* y a Γ el conjunto de *axiomas no l ogicos* de $\mathfrak{T}$.

Más aún, si Γ es *identificable* (i.e. tenemos un método efectivo que nos responde si, dada una fórmula $\mathscr{A}$, esta pertenece o no a Γ), decimos que $\mathfrak{T}$ es *recursivamente axiomatizada*.

La Teoría de Conjuntos *ZFC* y la aritmética de Peano son ejemplos de teorías recursivamente axiomatizadas. Por otra parte, si tomamos $\mathscr{T}$ como *todas* las fórmulas de la aritmética que son verdadderas cuando son interpretadas "de la manera obvia"[26] sobre $\mathbb{N}$ –la llamada *aritmética completa*– entonces *no hay* un conjunto Γ identificable tal que $\mathscr{T} = \mathbf{Thm}_{\Gamma}$. Decimos que la aritmética completa no es *recursivamente axiomatizada*.[27]

Meditación 1.2.3. ¿Porqué la aritmética completa forma una teoría? El trabajo desarrollado en la sección 1.4 –el teorema de correctud, en particular– implica que es cerrada bajo $\vdash$.

[25] A diferencia 'del lenguaje", que es todo **Fbf**.

[26] Esta es, el símbolo "0" del lenguaje se interpreta como *el* $0 \in \mathbb{N}$, "Sx" como $x+1$, "$(\exists x)$" como "hay un $x \in \mathbb{N}$", etc.

[27] La solución trivial –tomar $\Gamma = \mathscr{T}$– no servirá de nada, pues resulta que $\mathscr{T}$ no es identificable.

Nos inclinamos una vez más al abuso del lenguaje y llamamos a las teorías axiomáticas por el nombre de su conjunto de axiomas no lógicos Γ. De manera que si $\mathfrak{T} = (\mathscr{L}, \Lambda, \mathbf{I}, \mathscr{T})$ es una teoría de primer orden y $\mathscr{T} = \mathbf{Thm}_\Gamma$, nos referimos a ella de manera indistinta como "teoría $\mathfrak{T}$", "teoría $\mathscr{T}$" o "teoría Γ".

Si $\Gamma = \emptyset$, tenemos una teoría *pura o absoluta* (i.e. sólo estamos haciendo Lógica, no Matemáticas). Si $\Gamma \neq \emptyset$, tenemos una *teoría aplicada*. $\diamondsuit$

$\diamondsuit$ **Jerga (Argot).** Un *comentario final acerca de lenguaje vs. metalenguaje, y teoría vs. metateoría.* ¿Cuándo estamos hablando en el metalenguaje y cuando en el lenguaje?

La respuesta es, resp., "casi siempre" y "casi nunca". Como ya se ha dicho, *en principio*, estamos hablando en el *lenguaje formal* cuando estamos pronunciando o escribiendo una *expresión* de **Term** o **Bfb**. En otro caso, estamos (hablando o escribiendo) en el *metalenguaje*. Parece que estamos hablando y escribiendo (y quienquiera que haya escrito un libro de Lógica o Teoría de Conjuntos) en el metalenguaje con una frecuencia cercana al 100%.

El formalista es lo suficientemente inteligente como para simplificar notación todo el tiempo. Rara vez escribiremos una f ormula bien formada y en las ocasiones que lo hagamos, solo servirá para *ilustrar porqué uno deb evitar hacerlo*: Porque son muy largas y de difícil lectura y comprensión.

Estaremos halando en el lenguaje formal con un "acento" fuerte y usando muchos "idiomas" tomados de la (meta)matemática "real" y del español. Llamaremos a nuestro dialecto *jerga o argot*, en concordancia con [Manin, 1977].

Es importante detectar y/o recordar cuando estamos *trabajando* dentro de la teoría,[28] que es precisamente cuando generamos teoremas. Así, no hay problema si un teorema (y mucho de lo que hemos anotado durante su prueba) está escrito en *jerga (argot)*.

Dos ejemplos:

(1) Se está trabajando *dentro* de la teoría formal de números (o aritmética formal) si uno formula y demuestra (desde los axiomas de Peano) que "todo número natural $n > 1$ tiene un factor primo". Nótese como el teorema está formulado en *argot*. Ahora damos la traducción en el lenguaje formal de la aritmética:[29]

$$(\forall n)(S0 < n) \rightarrow (\exists x)(\exists y)(n = x \times y \wedge S0 < x \wedge \\ (\forall m)(\forall r)(x = m \times r \rightarrow m = S0 \vee m = x)))$$

[28] Importante, porque al argumentar dentro de la teoría nos restringimos a usar *solamente* axiomas (y teoremas ya demostrados; cf. observación 1.2.4) y las reglas de inferencias –nada más que estas herramientas sinácticas está permitido.

[29] Bueno, casi. Con el propósito de abreviar, todos los nombres de variables usados en la fórmula son metasímbolos.

(2) Se está trabajando *dentro* de la lógica formal si se está escribiendo una prueba formal de $(\exists v_{13})v_{13} = v_{13}$.

Suponga que sin embargo, nuestra actividad consiste en efectuar definiciones, presentar axiomas, o analizar el comportamiento o la capacidad de $\mathfrak{T}$, e.g., probar alguna regla secundaria $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$, o investigar la consistencia[30] o la “consistencia relativa”.[31] Es entonces cuando estamos operando en la *metateoría*, en la matemática “real”. ◊

◊◊ Uno de los problemas importantes plateados dentro de la metateoría es

“Dada una teoría $\mathfrak{T}$ y una fórmula $\mathscr{A}$, ¿$\mathscr{A}$ es un teorema de $\mathfrak{T}$?”

Este es el *Entscheidungsproblem* de Hilbert, o *el problema de la desición*. Hilbert creyó que toda teoría formal recursivamente axiomatiza debería admitir una “solución general”, por procedimientos masomenos mecánicos, a su problema de la desición. Las técnicas de Gödel y la perspicacio de Church mostraron que tal problema es, en general, irresoluble por medios “algorítmicos”.

Meditación 1.2.4. ¿Qué tanta matemática real nos está permitido usar, *de forma fiable*, para estudiar o hablar acerca de la “simulación” que es el sistema formal?[32] Por ejemplo, ¿Hemos sobrepasado nuestra frontera por usar inducción (e implicitamente, todo el conjunto $\mathbb{N}$) en nuestra metateoría platonista, en específico en las definiciones recursivas de términos, fórmulas bien formadas, teoremas, y demás?

La objeción aquí es más de corte “ideológico” (“político”). Algunas personas, Hilbert destaca como el mayor exponente, argumentan lo siguiente: La matemática formal se supone que debe “producir” *expresiones matemáticas verdaderas*, pero no las *falsas*, y esta ausencia de contradicciones debe ser *verificable*. Pero, como estamos verificando en la metateoría (i.e. fuera del sistea formal), ¿No debería estar “libre de toda sospecha (de contradicción)” la misma metateoría? Naturalmente.

La sugerencia de Hilbert para lograr tal “ausencia de sospecha” fue, esencialmente, utilizar en la metateoría sólo un pequeño fragmento de la “realidad” que sean tan simple y cercano a la intuición que no requiera “ser certificada” (via formaización) para estar libre de sospecha. En concreto, restringir la metama-

[30]Es decir, si $\mathscr{T} =$**Fbf**

[31]Esto es, “ Si una teoría Γ es consistente y le agregamos la fórmula $\mathscr{A}$ como axioma no lógico, la teoría resultante ¿Sigue siendo consistente?”

[32]Los métodos o extensión que un lógico usa – en la investifación de un sistema formal– a menudo don *restringidos* por razones técnicas o filosóficas

temática.[33] Tal fragmento de la metateoría, dice, no debería tener nada que ver con la noción de infinito, en particular con *el conjunto* $\mathbb{N}$ *completo* y todo lo que acarrea (e.g. definiciones recursivas y pruebas inductivas).[34]

De no ser por los resultados sobre incompletud de Gödel, esta posición –las técnicas metamatemáticas deben ser *finitarias*– hubiese prevalecido. Sin embargo, Gödel demostró que era inútil, y la mayoría de los matemáticos tuvieron que adaptarse a las técnicas infinitarias metamatemáticas, o al menos a $\mathbb{N}$ y a la inducción.[35] Por supuesto, sería imprudente usar "matemáticas bajo sospecha (de consistencia)" como herramientas metamatemáticas (e.g. toda la teoría ingenua de conjuntos).

1.3. Metateoremas Básicos

Trabajaremos con una teoría arbitraria $\mathfrak{T} = (\mathscr{L}, \Lambda, \mathbf{I}, \mathscr{T})$, donde $\mathbf{I}$ son las reglas de inferencia de la definición 1.2.9 y Λ es el conjunto de axiomas lógicos de la definición 1.2.8. También pediremos que Γ es un conjunto apropiado de axiomas no lógicos, i.e., $\mathscr{T} = \mathbf{Thm}_\Gamma$.

Metateorema 1.3.1. Teorema Tautológico de Post Extendido. *Si* $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{B}$*, entonces* $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$*.*

Demostración. La supposición nos lleva a

$$\models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_n \to \mathscr{B} \qquad (1)$$

Así, ya que la fórmula (1) está en Λ y en vista de la definicón 1.2.10, tenemos que

$$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{A}_1 \to \ldots \to \mathscr{A}_n \to \mathscr{B} \quad (2)$$

Aplicando modus ponens n veces, a (2), se obtiene $\mathscr{B}$. □

◊ 1.3.1 es una *regla secundaria* omnipresente. ◊

[33] De otro modo tendríamos que formalizar la metamatemática –para "certificarla"– y después la metametamatemática, y así sucesivamente. Pues si "metaM" tiene autoridad para comprobar la consistencia de 'M", entonces el mismo debe ser consistente; así que hay que formalizar "metaM" y permitamos que "metametaM" le compruebe; ... una historia sin fin.

[34] Ver ([Hilbert and Bernays, 1968] pp. 21-29) para un esquema elaborado que construye "objetos numéricos concretos" –*Ziffern* o "numerales"– '|', '||', '|||', etc., que representan '1', '2', '3', etc., complementada con una técnica de prueba para esos objetos ("inducción matemática concreta"), e incluso el comienzo de su teoría de la recursión. En todo momento y por obvias razones, sólo conjuntos finitos de tales objetos fueron considerados.

[35] Algunos defensores de las técnicas infinitarias en metamatemáticas han usado palabras muy fuertes para describir el fracaso del " Programa de Hilbert". [Rasiowa and Sikorski, 1963] escriben en su introducción " Sin embargo, los resultados de Gödel esponen el fiasco de los métodos finitistas de Hilbert en lo que se refiere a la consistencia".

Definición 1.3.1. $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *(demostrablemente) equivalentes en* $\mathfrak{T}$ sii $\Gamma \vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$.

Metateorema 1.3.2. *Cualesquiera dos teoremas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ en $\mathfrak{T}$ son (demostrablemente) equivalentes en $\mathfrak{T}$.*

Demostración. Por metateorema 1.3.1, $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ implica que $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. De forma similar, $\Gamma \vdash \mathscr{B}$ implica que $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Haciendo uso, nuevamente, del metateorema 1.3.1 tenemos que $\Gamma \vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$. □

$\diamondsuit$ *Pequeño detalle*: $\vdash \neg x = x \leftrightarrow \neg y = y$ (¿Porqué?), pero ni $\neg x = x$ ni $\neg y = y$ son $\emptyset$-teoremas. $\diamondsuit$

Observación 1.3.1. $\diamondsuit$ **Demostraciones al estilo de Hilbert.** En la práctica, las demostraciones se escriben "verticalmente", es decir, como secuencias verticales numeradas (listas) de fórmulas. La numeración ayuda al comentar cada fórmula de la lista, como veremos en la siguiente demostración.

Estrictamente hablando, un metateorema acepta una *meta*demostración. La siguiente es una regla secundaria, y por ello se encuentra en la metateoría (como también su demostración).

Sin embargo, hay otra forma de verlo: Los símbolos sintácticos x, $\mathscr{A}$, y $\mathscr{B}$, en el siguiente metateorema, representan una variable *específica* y fórmulas *específicas* que hemos olvidado "escribir" de manera explícita. De esta forma, se puede pensar que la demostración es una *demostración (formal) al estilo de Hilbert*. $\diamondsuit$

Metateorema 1.3.3. $\forall$-cuantificación o Cuantificación Universal. *Si x no acurre libre en $\mathscr{A}$, entonces $\mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \to (\forall x)\mathscr{B}$.*

Demostración.

(1)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	Dada
(2)	$\neg\mathscr{B} \to \neg\mathscr{A}$	(1) y metateorema 1.3.1
(3)	$(\exists x)\neg\mathscr{B} \to \neg\mathscr{A}$	(2) y $\exists$-cuantificación
(4)	$\mathscr{A} \to \neg(\exists x)\neg\mathscr{B}$	(3) y metateorema 1.3.1
(5)	$\mathscr{A} \to (\forall x)\mathscr{B}$	(4), con uso de la abreviación universal

□

Metateorema 1.3.4. Especialización. *Para cualquier fórmula $\mathscr{A}$ y cualquier término t, $\vdash (\forall x)\mathscr{A} \to \mathscr{A}[t]$.*

$\diamondsuit$ En este momento, es sensato recordar nuestras convenciones sobre las abreviaciones, en particular **Ax2** en la definición 1.2.8. $\diamondsuit$

Demostración.

(1)	$\neg\mathscr{A}[t] \to (\exists x)\neg\mathscr{A}$	En Λ
(2)	$\neg(\exists x)\neg\mathscr{A} \to \mathscr{A}[t]$	(1) y metateorema 1.3.1
(3)	$(\forall x)\mathscr{A} \to \mathscr{A}[t]$	(2), con uso de la abreviación universal

□

Corolario 1.3.1. *Para cualquier fórmula* $\mathscr{A}$, $\vdash (\forall x)\mathscr{A} \to \mathscr{A}$.

Demostración. $\mathscr{A}[x \leftarrow x] \equiv \mathscr{A}$. □

Meditación 1.3.1. ¿Porqué $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}[x \leftarrow x]$ son la misma expresión?

Metateorema 1.3.5. Generalización. *Para cualesquiera* Γ *y* $\mathscr{A}$, *si* $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ *entonces* $\Gamma \vdash (\forall x)\mathscr{A}$.

Demostración. Tomemos $y \not\equiv x$, y luego continuamos cualquier demostración de $\mathscr{A}$ (desde Γ) dada como sigue:

(1)	$\mathscr{A}$	Demostrada desde Γ
(2)	$y = y \to \mathscr{A}$	(1) y metateorema 1.3.1
(3)	$y = y \to (\forall x)\mathscr{A}$	(2) y $\forall$-cuantificación
(4)	$y = y$	en Δ
(5)	$(\forall x)\mathscr{A}$	(3), (4) y MP

□

Corolario 1.3.2. *Para cualesquiera* Γ *y* $\mathscr{A}$, $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ *sii* $\Gamma \vdash (\forall x)\mathscr{A}$.

Demostración. Por el corolario 1.3.1, metateorema 1.3.5 y Modus Ponens. □

Corolario 1.3.3. *Para cualesquiera* $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \vdash (\forall x)\mathscr{A}$ *y* $(\forall x)\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$.

El corolario anterior motiva la siguiente definición. Tambien justifica la práctica matemática común de "omitir los cuantificadores universales". Esto es, a menudo expresamos "$\ldots x \ldots$" en vez de "$(\forall x)\ldots x \ldots$".

Definición 1.3.2. Cerradura Universal. Sea $y_1, \ldots, y_n$ la lista de todas las variables libres de $\mathscr{A}$. La *cerradura universal* de $\mathscr{A}$ es la fórmula $(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathscr{A}$ –que la mayoría de las veces la escribimos como $(\forall y_1, \ldots, y_n)\mathscr{A}$, o bien $(\forall \vec{y_n})\mathscr{A}$.

♢ por el corolario 1.3.3, una fórmula deduce y es deducida por su cerradura universal. ♢

Meditación 1.3.2. *Dijimos* la *cerradura universal. Esperemos que lo dicho arriba no se vea afectado por permutaciones de* $(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)$. *¿Es asi? (Ejercicio* **??***).*

Corolario 1.3.4. Sustitución de Términos. $\mathscr{A}[x_1, \ldots, x_n] \vdash \mathscr{A}[t_1, \ldots, t_n]$ *para cualesquiera términos* $t_1, \ldots, t_n$.

♢ Es conveniente revisar la definición 1.2.7 y la observación posterior. ♢

Demostración. Haremos un bosquejo de la prueba con $n = 2$. Lo interesante es que debemos hacer "sustitución simultanea". Para ello, primero sustituiremos x_1, x_2 por *nuevas* variables z, w que no ocurran ni en $\mathscr{A}$ ni en t_1, t_2. La prueba es la siguiente lista. Los comentarios justifican la presencia de la fórmula que acompañan en virtud de la fórmula inmediata anterior.

$\mathscr{A}[x_1, x_2]$	Punto inicial
$(\forall x_1)\mathscr{A}[x_1, x_2]$	Generalización
$\mathscr{A}[z, x_2]$	Especialización; $x_1 \leftarrow z$
$(\forall x_2)\mathscr{A}[z, x_2]$	Generalización
$\mathscr{A}[z, w]$	Especialización; $x_2 \leftarrow w$

Y ahora $z \leftarrow t_1$, $w \leftarrow t_2$, *en cualquier orden*, no es otra cosa que la "sustitución simultanea" dada en la definición 1.2.7.

$(\forall z)\mathscr{A}[z, w]$	Generalización
$\mathscr{A}[t_1, w]$	Especialización; $z \leftarrow t_1$
$(\forall w)\mathscr{A}[t_1, w]$	Generalización
$\mathscr{A}[t_1, t_2]$	Especialización; $w \leftarrow t_2$

□

Metateorema 1.3.6. El Metareorema Variante, o de Renombrado Bobo. *Para cualquier fórmula $(\exists x)\mathscr{A}$, si z no ocurre en ella (ni de forma libre ni de forma acotada), entonces $\vdash (\exists x)\mathscr{A} \leftrightarrow (\exists z)\mathscr{A}[x \leftarrow z]$.*

◊ A menudo escribimos $\vdash (\exists x)\mathscr{A} \leftrightarrow (\exists z)\mathscr{A}[z]$ en vez de $\vdash (\exists x)\mathscr{A} \leftrightarrow (\exists z)\mathscr{A}[x \leftarrow z]$. Por cierto, otra forma de dar las condiciones es; "si z *no* ocurre en $\mathscr{A}$ (ni de forma libre, ni de forma acotada) y x es distinto de z. Es obvio que cuando $x \equiv z$ no hay nada que probar. ◊

Demostración. Ya que z es sustituto para x, por las condiciones dadas, $\mathscr{A}[x \leftarrow z]$ está definida. Por **Ax2**

$$\vdash \mathscr{A}[x \leftarrow z] \rightarrow (\exists x)\mathscr{A}$$

Por $\exists$-cuantificación –ya que z no es libre en $(\exists x)\mathscr{A}$– tambien tenemos

$$\vdash (\exists z)\mathscr{A}[x \leftarrow z] \rightarrow (\exists x)\mathscr{A} \qquad (1)$$

Notemos que x no ocurre libre en $(\exists z)\mathscr{A}[x \leftarrow z]$, pero ocurre libre para z en $\mathscr{A}[x \leftarrow z]$. En realidad $\mathscr{A}[x \leftarrow z][z \leftarrow x] \equiv \mathscr{A}$. Así, por **Ax2**,

$$\vdash \mathscr{A} \rightarrow (\exists z)\mathscr{A}[x \leftarrow z]$$

Por siguiente, usando $\exists$-cuantificación,

$$\vdash (\exists x)\mathscr{A} \rightarrow (\exists z)\mathscr{A}[x \leftarrow z] \qquad (2)$$

Implicación tautológica aplicada a (1) y (2) conluye la demostración. □

$\diamondsuit$ ¿Porqué $\mathscr{A}[x \leftarrow z][z \leftarrow x] \equiv \mathscr{A}$? Lo podemos verificar por inducción sobre $\mathscr{A}$ (recordar que z no ocurre ni libre ni acotada en $\mathscr{A}$).

Si $\mathscr{A}$ es atómica, la cuestión es trivialmente cierta y ello se propaga con las reglas de formación dadas en la definición 1.1.4(b).

Ahora consederemos el caso en que $\mathscr{A} \equiv (\exists w)\mathscr{B}$. Nótese que bajo nuestras suposiciones, es posible que $w \equiv x$ pero no es posible que $w \equiv z$. Si $w \equiv x$, entonces $\mathscr{A}[x \leftarrow z] \equiv \mathscr{A}$; en particular, z no ocurre libre en $\mathscr{A}$. Así que tambien $\mathscr{A}[x \leftarrow z][z \leftarrow x] \equiv \mathscr{A}$.

Veamos que pasa cuando $w \not\equiv x$. Por H.I., $\mathscr{B}[x \leftarrow z][z \leftarrow x] \equiv \mathscr{B}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}[x \leftarrow z][z \leftarrow x] &\equiv ((\exists w)\mathscr{B})[x \leftarrow z][z \leftarrow x] \\
&\equiv ((\exists w)\mathscr{B}[x \leftarrow z])[z \leftarrow x] && \text{ver def. 1.3.2; } w \not\equiv z \\
&\equiv ((\exists w)\mathscr{B}[x \leftarrow z][z \leftarrow x]) && \text{ver def. 1.3.2; } w \not\equiv x \\
&\equiv ((\exists w)\mathscr{B}) && \text{H.I.} \\
&\equiv \mathscr{A}
\end{aligned}$$

Por el metateorema 1.3.6, la cuestión de la sustitución se vuelve irrelevante. Ya que tenemos un suministro infinito de variables (para usar, digamos, como variables acotadas), siempre podemos renombrar *todas* las variables acotadas en $\mathscr{A}$, de tal forma que los nuevos nombres sean diferentes de todas las variables libres que ocurran en $\mathscr{A}$ y en t. Haciendo esto, obtenemos una fórmula $\mathscr{B}$ que es (absolutamente) demostrable y equivalente a la original.

Entonces $\mathscr{B}[x \leftarrow t]$ queda definida (t es sustituto de x). Esto nos deja una moraleja; cualquier término t es libre para x en $\mathscr{A}$ *despues de un renombrado bobo* apropiado.

Lo expuesto anteriormente es una de las razones por las que es necesaria una provisión infinita de variables formales (o tener una manera de extender un conjunto finito de ellas, si se prefiere el enfoque finitista). $\diamondsuit$

Definición 1.3.3. En lo que sigue, frecuentemente discutiremos dos (o mas) teorías al mismo tiempo. Sean $\mathfrak{T} = (\mathscr{L}, \Lambda, \mathbf{I}, \mathscr{T})$ y $\mathfrak{T}' = (\mathscr{L}', \Lambda, \mathbf{I}, \mathscr{T}')$ dos teorías, tales que $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{V}'$. Esto premite que $\mathfrak{T}'$ "comprenda" todas las fórmulas de $\mathfrak{T}$ (mas *no* al revés, ya que $\mathscr{L}'$) puede contener símbolos no lógicos adicionales).

Decimos que $\mathfrak{T}'$ es una *extensión* de $\mathfrak{T}$ (denotado como $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{T}'$) sii $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$.

Sea $\mathscr{A}$ una fórmula sobre $\mathscr{L}$ (que ambas teorías comprendan). Denotamos las expresiones $\mathscr{A} \in \mathscr{T}, \mathscr{A} \in \mathscr{T}'$ como $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}, \vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}$, respectivamente.

Se dee notar que no hicimos mención explícita de los axiomas no lógicos Γ y Γ' en la simbolización anterior, ya que el subíndice de $\vdash$ lo lleva implícito.

Decimos que la extensión es *conservativa* sii para cualequier fórmula $\mathscr{A}$ sobre $\mathscr{L}$, siempre que $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}$ tambien se tiene que $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}$. Dichode otra manera; cuando se trata de fórmulas sobre $\mathscr{L}$ que ambas teorías "leen", ninguna de ellas es mejor que la otra al producir teoremas.

Metateorema 1.3.7. Metateorema acerca de Constantes. *Supongamos que extendemos un lenguaje $\mathscr{L}$ de una teoría $\mathfrak{T}$ agregando nuevos símbolos constantes $e_1,\ldots,e_n$ al alfabeto $\mathscr{V}$, resultando asi un alfabeto $\mathscr{V}'$, un lenguaje $\mathscr{L}'$ y una teoría $\mathfrak{T}'$. Más aún, supongamos que no agregamos nuevos axiomas no lógicos, es decir $\Gamma' = \Gamma$.*

Así, $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$ implica $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$, para cuales quiera variables $x_1,\ldots,x_n$ que ocurran, ya sea de manera libre o acotada, en algún lugar de $\mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$.

Demostración. Fijamos un conjunto de variables $x_1,\ldots,x_n$ que cumplan las hipótesis. Hacemos inducción sobre $\mathfrak{T}'$-teoremas.

Base. Si $\mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$ es un axioma lógico (sobre $\mathscr{L}'$), entonces tambien lo es $\mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$ (sobre $\mathscr{L}$) – en vista de nuestra restricción sobre $x_1,\ldots,x_n$– y por tanto $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$. Nótese que, ajo nuestras suposiciones, $\mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$ *no puede* ser un axioma no lógico.

Meditación 1.3.3. ¿Qué rol juega nuestra resticción sobre $x_1,\ldots,x_n$ en la argumentación anterior?

Modus Ponens. Supongamos que $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{B}[e_1,\ldots,e_n] \to \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$ y que $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{B}[e_1,\ldots,e_n]$. Por H.I. $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{B}[y_1,\ldots,y_n] \to \mathscr{A}[y_1,\ldots,y_n]$ y $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{B}[y_1,\ldots,y_n]$, donde $y_1,\ldots,y_n$ ocurren de manera libre o acotada en algún lugar de $\mathscr{B}[e_1,\ldots,e_n] \to \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$. Por modus ponens, $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[y_1,\ldots,y_n]$. Así que $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$, por el corolario 1.3.4 y el metateorema 1.3.6.

$\exists$-*Cuantificación.* Supongamos que $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{B}[e_1,\ldots,e_n] \to \mathscr{C}[e_1,\ldots,e_n]$, que z no ocurre libre en $\mathscr{C}[e_1,\ldots,e_n]$ y que $\mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n] \equiv (\exists z)\mathscr{B}[e_1,\ldots,e_n] \to \mathscr{C}[e_1,\ldots,e_n]$. Por H.I., si $w_1,\ldots,w_n$ –distintos de z– ocurren de manera libre o acotada en algún lugar de $\mathscr{B}[e_1,\ldots,e_n] \to \mathscr{C}[e_1,\ldots,e_n]$, entonces $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{B}[w_1,\ldots,w_n] \to \mathscr{C}[w_1,\ldots,w_n]$. Por $\exists$-cuantificación, tenemos que $\vdash_{\mathfrak{T}} (\exists z)\mathscr{B}[w_1,\ldots,w_n] \to \mathscr{C}[w_1,\ldots,w_n]$. Por corolario 1.3.4 y metateorema 1.3.6 $\vdash_{\mathfrak{T}} (\exists z)\mathscr{B}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathscr{C}[x_1,\ldots,x_n]$, i.e., $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$. □

Corolario 1.3.5. *Bajo los mismos supuestos del metateorema 1.3.7 tenemos que, para cualquier elección de variables $x_1,\ldots,x_n$:*

$$\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n] \qquad \textit{sii} \qquad \vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$$

Demostración. Vuelta. Trivialmente $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$ implica $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$. así que, por corolario 1.3.4, $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$. *Ida.* Tomemos variables $y_1,\ldots,y_n$ que ocurran de manera libre o acotada en $\mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$. Por metateorema 1.3.7, si $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}[y_1,\ldots,y_n]$. Luego, por corolario 1.3.4 y metateorema 1.3.6, $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$. □

Observación 1.3.2. ◇ En estas circunstancias, la extensión $\mathfrak{T}'$ de $\mathfrak{T}$ es *conservativa*. Pues, si $\mathscr{A}$ es una fórmula sobre $\mathscr{L}$, entonces $\mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n] \equiv \mathscr{A}$. Por consiguiente, si $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}$, entonces $\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$; luego $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$, es decir $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}$.

Una forma más contundente de expresar lo anterior es la siguiente; $\mathfrak{T}'$ *no "comprende" ningún hecho metamatemático nuevo que* $\mathfrak{T}$ *no "conociera" ya, aunque fuera por medio de otro nombre*. Si $\mathfrak{T}'$ demuestra a $\mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$, entonces $\mathfrak{T}$ puede demostrar la misma expresión, aunque para ello tenga que usar cualesquiera nombres (posiblemente distintos de $e_1,\ldots,e_n$) que tengan significado en su propio lenguaje. a saber, puede demostrar $\mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$. $\diamondsuit$

El siguiente corolario tiene su origen en las pruebas (más que en los enunciados) del metateorema 1.3.7 y el corolario 1.3.5 y tiene su importancia.

Corolario 1.3.6. *Sean $e_1,\ldots,e_n$ constantes que no aparezcan en los axiomas no lógicos Γ. Entonces, si $x_1,\ldots,x_n$ son variables cualesquiera y si $\Gamma \vdash \mathscr{A}[e_1,\ldots,e_n]$, entonces tambien $\Gamma \vdash \mathscr{A}[x_1,\ldots,x_n]$.*

Metateorema 1.3.8. Teorema de la Deducción. *Sean $\mathscr{A}$ una fórmula cerrada, $\mathscr{B}$ una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas. Si $\Gamma + \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$, entonces $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.*

$\diamondsuit$ **N.B.** $\Gamma + \mathscr{A}$ denota al conjunto $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$. Si bien $\mathscr{A}$ es una fórmula, el metateorema se puede extender para un esquema de fórmulas $\mathscr{A}'$, en cuyo caso $\Gamma + \mathscr{A}' = \Gamma \cup \{$ todas las posibles instancias de $\mathscr{A}'\}$.

El regreso del metateorema es trivialmente verdadero; es decir $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ implica $\Gamma + \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$. Ellos se sigue inmediatamente por Modus Ponens y no es necesario que $\mathscr{A}$ sea cerrada. $\diamondsuit$

Demostración. Por inducción sobre los $(\Gamma + \mathscr{A})$- teoremas.

Base. Sea $\mathscr{B}$ un axioma lógico o no lógico (en este caso tambien hay que pedir $\mathscr{B} \not\equiv \mathscr{A}$). Entonces $\Gamma \vdash \mathscr{B}$.

Como $\mathscr{B} \models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, por metateorema 1.3.1 se tiene que $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

Si $\mathscr{B} \equiv \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un axioma lógico (**Ax1**); por tanto $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

Modus Ponens Supongamos que $\Gamma + \mathscr{A} \vdash \mathscr{C}$ y que $\Gamma + \mathscr{A} \vdash \mathscr{C} \to \mathscr{B}$.

Por H.I., $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ y $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{C} \to \mathscr{B}$.

Como $\mathscr{A} \to \mathscr{C}, \mathscr{A} \to \mathscr{C} \to \mathscr{B} \models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, tenemos que $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

∃-cuantificación Sean $\Gamma + \mathscr{A} \vdash \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $\mathscr{B} \equiv (\exists x)\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, donde x no ocurre libre en $\mathscr{D}$. Por H.I., $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Por metateorema 1.3.1, $\Gamma \vdash \mathscr{C} \to \mathscr{A} \to \mathscr{D}$; y por ∃-cuantificación (ya que $\mathscr{A}$ es cerrada) $\Gamma \vdash (\exists x)\mathscr{C} \to \mathscr{A} \to \mathscr{D}$. Por metateorema 1.3.1, otra vez, se tiene que $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to (\exists x)\mathscr{C} \to \mathscr{D}$. $\square$

Observación 1.3.3. (1) ¿Es realmente importante la condición "$\mathscr{A}$ es cerrada"? Si. Sea $\mathscr{A} \equiv x = a$, donde a es una constante. Entonces, aunque por generalización se tiene que $(\forall x)\mathscr{A}$, no siempre es verdadero que $\vdash \mathscr{A} \to (\forall x)\mathscr{A}$. Esto se entiende mejor bajo consideraciones de correctud (siguiente sección). Intuitivamente, si asumimos que nuestra lógica "no miente" (i.e. no demuestra fórmulas "inválidas"), es obvio que $x = a \to (\forall x)x = a$ *no puede ser* absolutamente demostrable, porque es "mentira". Al menos sobre $\mathbb{N}$ podemos ver que es falsa, al interpretar a a como "0".

(2) El corolario 1.3.5 otorga mayor flexibilidad a la aplicación del *teorema de la deducción*:

$$\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A} \to \mathscr{B}[x_1, \dots, x_n] \qquad (*)$$

donde $[x_1, \dots, x_n]$ es la lista de *todas las variables libres que ocurren* en $\mathscr{A}$, es equivalente, por el metateorema mencionado, a a

$$\vdash_{\mathfrak{T}'} \mathscr{A} \to \mathscr{B}[e_1, \dots, e_n] \qquad (**)$$

donde $e_1, \dots, e_n$ son constantes agregadas a $\mathscr{V}$ (sin alterar los axiomas no lógicos: $\Gamma = \Gamma'$.)

Como $\mathscr{A}[e_1, \dots, e_n]$ es cerrada, demostrando que

$$\Gamma' + \mathscr{A}[e_1, \dots, e_n] \vdash \mathscr{B}[e_1, \dots, e_n]$$

quedan demostrados automáticamente $(**)$ y $(*)$.

En la práctica no se realiza explícitamente este paso, pero *todas las variables libres que ocurren en $\mathscr{A}$ son tratadas "como si fueran constantes"* (proceso que usualmente conocemos como *fijar las variables*) a lo largo de la $(\Gamma + \mathscr{A})$-prueba.

(3) Algunos autores no se pide que $\mathscr{A}$ sea cerrada en el teorema de la deducción (e.g. [Bourbaki(B), 1966] y más recientemente [Enderton, 1972]).

¿Quién está en lo correcto? Ambos *dentro de sus respectivos contextos*. Si todas las reglas de inferencia son "proposicionales" (e.g. como en [Bourbaki(B), 1966] y [Enderton, 1972], que sólo usan Modus Ponens) –es decir, no se meten con cuantificaciones–, no es necesario agregar la restricción sobre $\mathscr{A}$. Si, por otra parte, las reglas de inferencia cuantifican sobre variables objeto, no se puede evitar tal restricción al teorema de la deducción, para no demostrar $\vdash \mathscr{A} \to (\forall x)\mathscr{A}$ (que es inválida) a partir de $\mathscr{A} \vdash (\forall x)\mathscr{A}$ (que es válida).

esto tambien implica que planteamientos como en [Bourbaki(B), 1966] y en [Enderton, 1972] *no permiten* la generalización "completa" $\mathscr{A} \vdash (\forall x)\mathscr{A}$, solo permiten una regla "mas débil"; 'si $\vdash \mathscr{A}$, entonces $\vdash (\forall x)\mathscr{A}$.[36]

(4) Esta diferencia de enfoques en la elección de las reglas de inferencia tiene otras repercusiones: Se debe tener especial cuidado al definir la contraparte semántica de $\vdash$, que es $\models$ (ver siguiente sección), pues se busca que ambos símbolos "vayan de la mano" (Teorema de Completud de Gödel).[37] $\diamondsuit$

[36] En realidad, permiten un poco más de generalidad, como la regla "si $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ *junto con una condición*, entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\mathscr{A}$. La condición es que las fórmulas en Γ no tengan ocurrencias libres de x." Por supuesto, siempre se puede tomar Γ finito (¿porqué?), así que la condición no está fuera de la realidad.

[37] En [Mendelson, 1987] se define $\models$ de manera inconsistente con $\vdash$.

Corolario 1.3.7. Demostración por Contradicción. *Sea $\mathscr{A}$ cerrada. Entonces $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ sii $\Gamma + \neg\mathscr{A}$ es inconsistente.*

Demostración. Vuelta. Tenemos que $\mathscr{T}$ =**Fbf**, donde $\mathscr{T}$ es la teoría $\Gamma + \neg\mathscr{A}$. En particular, $\Gamma + \neg\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$. Por el teorema de la deducción, $\Gamma \vdash \neg\mathscr{A} \to \mathscr{A}$. Pero $\neg\mathscr{A} \to \mathscr{A} \models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}$.

Ida. Se tiene que $\Gamma \vdash \mathscr{A}$. Entonces $\Gamma + \neg\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$ (recordar la observación 1.2.4(2)). Por supuesto $\Gamma + \neg\mathscr{A} \vdash \neg\mathscr{A}$. Como para cualquier $\mathscr{B}$, se tiene que $\mathscr{A}, \neg\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$, hemos terminado. □

Meditación 1.3.4. ¿Es necesaria la suposición " Sea $\mathscr{A}$ cerrada" en el corolario 1.3.7? ¿Porqué?

El siguiente metateorema es lo suficientemente importante como para enunciarse. Se demuestra con argumentaciones análogas a las utilizadas en la segunda parte de la prueba anterior.

Metateorema 1.3.9. *$\mathfrak{T}$ es inconsistente sii existe $\mathscr{A}$, tal que (simultáneamente) $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}$ y $\vdash_{\mathfrak{T}} \neg\mathscr{A}$.*

A continuación se enuncian algunas técnicas de prueba notables. Tales técnicas son usadas a diario en el quehacer matemático, y nosotros tambien los usaremos frecuentemente. Las demostraciones de los siquientes metateoremas se dejan al lector.

Metateorema 1.3.10. Distributividad o Monotonía del $\exists$. *Para cualesquiera $x, \mathscr{A}, \mathscr{B}$,*

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash (\exists x)\mathscr{A} \to (\exists x)\mathscr{B}$$

Demostración. Ver ejercicio **??**. □

Metateorema 1.3.11. Distributividad o Monotonía del $\forall$. *Para cualesquiera $x, \mathscr{A}, \mathscr{B}$,*

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash (\forall x)\mathscr{A} \to (\forall x)\mathscr{B}$$

Demostración. Ver ejercicio **??**. □

◊ El término monotonía está inspirado en analogía de "$\to$" y "$\leq$". ¿Cómo? Bien, tenemos la tautología

$$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \leftrightarrow \mathscr{B}) \qquad (i)$$

Si interpretamos "$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$" como "máx$(\mathscr{A}, \mathscr{B})$", entonces el lado derecho de (i) nos dice que $\mathscr{B}$ es el máximo de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, o que $\mathscr{A}$ es "menor o igual a" $\mathscr{B}$. Y el metateorema anterior establece que $\exists$ y $\forall$ conservan tal "desigualdad". ◊

Metateorema 1.3.12. Teorema de la Equivalencia, o Regla de Leibniz. *Sean $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$ fórmulas, donde $\mathscr{A}$ es una subfórmula de $\mathscr{C}$ y donde $\Gamma \vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$. Supongamos que $\mathscr{C}'$ se obtiene a partir de $\mathscr{C}$ reemplazando algunas –posible, pero no necesariamente todas– ocurrencias de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{C}$ por $\mathscr{B}$. Entonces $\Gamma \vdash \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{C}'$, i.e.*

$$\frac{\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}}{\mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{C}'}$$

es una regla secundaria.

Demostración. Por inducción sobre las fórmulas "$\mathscr{C}$". Ver ejercicio **??**. □

◇ La lógica ecuacional de predicados es un fundamento particular de la lógica de primer orden, que usa la regla de Leibniz como *la* regla de inferencia primaria. Al practicar tal lógica, se prefiere escribir las demostraciones como cadenas de equivalencias, la mayoría de las cuales proceden de una aplicación de la regla. Ver [Dijkstra and Scholten, 1990], [Gries and Schneider, 1994], . . .◇

Metateorema 1.3.13. Demostración por Casos. *Supongamos que $\Gamma \vdash \mathscr{A}_1 \vee \ldots \vee \mathscr{A}_n$, y que $\Gamma \vdash \mathscr{A}_i \to \mathscr{B}$ para $i = 1,\ldots,n$. entonces $\Gamma \vdash \mathscr{B}$.*

Demostración. Inmediato por metateorema 1.3.1. □

◇ La demostración or casos usualmente saca provecho del teorema de la deduccón. Es decir, Dando $\Gamma \vdash \mathscr{A}_1 \vee \ldots \vee \mathscr{A}_n$, procedemos agregando, en cada turno, $\mathscr{A}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ como un nuevo axioma no lógico ("fijando" sus variables), y a partir de ello se demuestra $\mathscr{B}$. Al terminar todos los casos queda demostrado $\mathscr{B}$.

En la práctica, se suele usar la siguiente jerga:

"Vamos a considerar los casos $\mathscr{A}_i$, con $i = 1,\ldots,n$.[38]

- **Caso $\mathscr{A}_1$.** … Por lo tanto $\mathscr{B}$.[39]

  . . .

- **Caso $\mathscr{A}_n$.** … Por lo tanto $\mathscr{B}$." ◇

Metateorema 1.3.14. Demostración por Constante Auxiliar. *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sobre un lenguaje $\mathscr{L}$. Supongamos que*

(1) $\Gamma \vdash (\exists x)\mathscr{A}[x]$.

(2) *$\Gamma + \mathscr{A}[a] \vdash \mathscr{B}$, donde a es una nueva constante que no pertenece al lenguaje $\mathscr{L}$ de Γ. Mas aún, supongamos que todas las variables libres de $\mathscr{A}[a]$ están fijas en la prueba de $\mathscr{B}$.*

[38] Por supuesto, para legitimar está separación en casos, debemos probar que $\Gamma \vdash \mathscr{A}_1 \vee \ldots \vee \mathscr{A}_n$.

[39] Es decir, agregamos el "axioma" $\mathscr{A}_1$ a Γ, fijando sus variables, y entonces demostramos $\mathscr{B}$.

Entonces $\Gamma \vdash \mathscr{B}$.

Demostración. Ejercicio **??** □

◊ La técnica provista por este metateorema se usa a menudo. Por ejemplo, en la geometría proyectiva axiomatizada como en [Veblen and Young, 1916], al demostrar el Teorema de Desargues sobre triángulos en perspectiva en un plano, se hace uso un punto arbitrario (¡Es una constante auxiliar!) *fuera* del plano (habiendo garantizado, por medio de los axiomas, que tal punto existe). Es importante notar que el teorema de Desargues de *ninguna manera se refiere* a este punto, de ahí el adjetivo "auxiliar".

En este ejemplo "$\mathscr{B}$" es el teorema de Desargues, "$(\exists x)\mathscr{A}[x]$" afirma que hay un punto fuera del plano, a es uno de tales puntos (arbitrario), y el numeral **(2)** dice masomenos "Sea a un punto fuera del plano" (que es *argot* para decir *"agregando el axioma* $\mathscr{A}[a]$". ◊

1.4. Semántica; Correctud, Completud, Compacidad

Así que ¿Qué significan todos esos símbolos? En esta sección veremos coomo "decodificar" las expresiones formales (fórmulas) en proposiciones dela matemática "real". Recíprocamente, esto nos permitirá entender como codificar las afirmaciones de la matemática real dentro de nuestro lenguaje formal.

La definición rigurosa[40] de semántica para lenguajes de primer orden se debe a Tarski y es conocida como "la semántica de Tarski". La definición que daremos a continuación ([Schoenfield, 1967]) refleja adecuadamente nuestras elecciones sintácticas. Más importante, definiremos la contraparte semántica de $\vdash$, $\models$, para asegurar que $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ sii $\Gamma \models \mathscr{A}$. Esto es el contenido del teorema de completud de Gödel, que estableceremos en esta sección.

Es esta sección haremos uso de algunos resultados y notaciones de la teoría informal de conjuntos, Entr otras cosas denotaremos

$$A^n \qquad (\text{o } \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{n\ veces})$$

para el conjunto de n-adas ordenadas de elementos en A.

Tambíen haremos uso de los símbolos $\subseteq$, $\cup$, $\bigcup_{a\in I}$.[41]

[40] A menudo se dice " la definición formal...", pero la palabra "formal" es engañosa en este contexto, pues estamos definiendo semántica en la metateoría, no en nuestra teoría formal.

[41] Si tenemos un conjunto (de conjuntos) $\{S_a, S_b, S_c, \dots\}$ donde todos los índices $a, b, c, \dots$ salen de un "conjunto de índices I, entonces el símbolo $\bigcup_{i\in I} S_i$ representa la colección de *todos* los objetos x que se encuentran en *al menos uno* de los conjuntos S_i. Es un hábito común escribir $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ en vez de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. $A \cup B$ es lo mismo que $\bigcup_{i\in\{1,2\}} S_i$, donde $S_1 = A$ y $S_2 = B$.

En algunos pasajes –delimitados por ♢♢– se llegará al punto de la sinrazón.

Por ejemplo, en la demostración del resultado de de completud-compacidad de Gödel-Malcev será necesario algún conocimiento elemental sobre ordinales –que son usados para indizar– y cardinalidad. Algunos lectores podrían no tener tales conocimientos. Este prerrequisito puede cubrirse consultando cualquier libro de teoría de conjuntos (como el volumen 2).

Definición 1.4.1. Sea $\mathscr{L} = (\mathscr{V}, \mathbf{TERM}, \mathbf{Fbf})$ un lenguaje. Una *estructura* $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$ *apropiada para* $\mathscr{L}$ es un par ordenado tal que $M \neq \emptyset$ es un conjunto (*dominio*, *conjunto subyacente* o *universo*[42]) y $\mathscr{I}$ ("$\mathscr{I}$" por interpretación) es un *mapeo* que asigna

(1) un único elemento $a^{\mathscr{I}} \in M$ a cada constante a de $\mathscr{V}$.

(2) una única función (total)[43] $f^{\mathscr{I}} : M^n \to M$ para cada función f de $\mathscr{V}$ (de aridad n).

(3) un único conjunto $P^{\mathscr{I}} \subseteq M^n$[44] a cada predicado P en $\mathscr{V}$ (de aridad n).

Observación 1.4.1. ♢ La estructura $\mathfrak{M}$ es definida a menudo con mayor extensión, como es costumbre en álgebra. Expliquemos esto a detalle; $\mathscr{I}$ se "desempaca" en una lista $a^{\mathscr{I}}, b^{\mathscr{I}}, \ldots; f^{\mathscr{I}}, g^{\mathscr{I}}, \ldots; P^{\mathscr{I}}, Q^{\mathscr{I}}, \ldots$ y en este caso vamos a escribir $\mathfrak{M} = (M; a^{\mathscr{I}}, b^{\mathscr{I}}, \ldots; f^{\mathscr{I}}, g^{\mathscr{I}}, \ldots; P^{\mathscr{I}}, Q^{\mathscr{I}}, \ldots)$. Bajo este enfoque, una estructura es un conjunto subyacente (universo), M, junto con una *lista* de constantes, funciones y relaciones "concretas" que *interpreten* a sus correspondientes "nombres abstractos" (los símbolos del lenguaje).

Bajo tales circunstancias notacionales, usamos frecuentemente los símbolos $a^{\mathfrak{M}}, f^{\mathfrak{M}}, P^{\mathfrak{M}}$ –en vez de $a^{\mathscr{I}}, f^{\mathscr{I}}, P^{\mathscr{I}}$– para indicar las interpretaciones en $\mathfrak{M}$ de la constante a, la función f y el predicado P, respectivamente.

Hemos dicho "estructura apropiada para $\mathscr{L}$" para enfatizar la generalidad del lenguaje y, por consiguiente, nuestra habilidad para interpretar de maneras diversas lo que decimos dentro de él. Aunque a menudo,e.g, como en la aritmética formal o la teoría de conjuntos, tenemos una estructura en mente, y después construimos un lenguaje formal para codificar *formalmente* proposiciones acerca de los objetos que están en la estructura. Bajo estas circunstancias, en efecto, definimos un lenguaje apropiada *para la estructura*. Usamos $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ para indicar que el lenguaje está hecho para ajustarse a la estructura $\mathfrak{M}$. ♢

Definición 1.4.2. Con frecuencia agregamos símbolos no lógicos a un lenguaje $\mathscr{L}$ y con ello obtenemos un lenguaje $\mathscr{L}'$. Decimos que $\mathscr{L}'$ es una *extensión* de $\mathscr{L}$

---

[42]También suele llamarse "universo de discurso" o "dominio de discurso".

[43]Pedir que $f^{\mathscr{I}}$ sea total es por tradición y significa que $f^{\mathscr{I}}$ está definida en todo el conjunto M^n.

[44]Así, $P^{\mathscr{I}}$ es una relación n-aria con entradas y respuestas en M.

y que $\mathscr{L}$ es una *restricción* de $\mathscr{L}'$. Sugongamos que $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$ es una estructura para $\mathscr{L}$ y que $\mathfrak{M}' = (M, \mathscr{I}')$ es una estructura, ambas con el mismo conjunto subyacente M, pero I' asigna el mismo *significado* que $\mathscr{I}$ a los símbolos de $\mathscr{L}$ y asigna significado a todos los *nuevos* símbolos.

Decimos que $\mathfrak{M}'$ es una *expansión* (en ves de "extensión") de $\mathfrak{M}$, y que $\mathfrak{M}$ es un *reducto* (en vez de "reducción") de $\mathfrak{M}'$. Se puede escribir $\mathscr{I} = \mathscr{I}' \restriction \mathscr{L}$ para indicar que el "mapeo" $\mathscr{I}'$ –restringido a $\mathscr{L}$ (símbolo "'$\restriction$')– es igual a $\mathscr{I}$. También se puede escribir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \restriction \mathscr{L}$.

Definición 1.4.3. Dado un lenguaje $\mathscr{L}$ y una estructura $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$ apropiada para $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$ denota el lenguaje obtenido de $\mathscr{L}$, agregando a $\mathscr{V}$ un único nombre nuevo $\bar{i}$ por cada objeto $i \in M$.

Esto convierte los conjuntos **TERM** y **Fbf** en **TERM**($\mathfrak{M}$) y **Fbf**($\mathfrak{M}$). Los miembros de estos últimos son conocidos como $\mathfrak{M}$-términos y $\mathfrak{M}$-fórmulas, respectivamente.

Extendemos el mapeo $\mathscr{I}$ a las nuevas constantes como: $\overline{i^{\mathscr{I}}} = i$ para todo $i \in M$ (donde el símbolo '=' es metamatemático: igualdad en M).

◇ Todo lo hecho hasta ahora es permitirnos hacer sustituciones como $[x \leftarrow i]$ de manera formal. Esto por medio de $[x \leftarrow \bar{i}\,]$. A continuación damos "significado" a *todos los términos cerrados* en $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$, usando recursión.◇

Definición 1.4.4. Para términos *cerrados* t en **TERM**($\mathfrak{M}$), definimos el símbolo $t^{\mathscr{I}} \in M$ inductivamente como:

(1) Si t es una constante (constante original) o $\bar{i}$ (constante importada), entonces $t^{\mathscr{I}}$ ya ha sido definida.

(2) Si t es la expresión $f t_1 \ldots t_n$, donde f es n-aria, y $t_1 \ldots t_n$ son $\mathfrak{M}$-término *cerrados*, definimos $t^{\mathscr{I}}$ como el objeto (en M) $f^{\mathscr{I}}(t_1^{\mathscr{I}}, \ldots, t_n^{\mathscr{I}})$.

Finalmente daremos "significado" a *todas las $\mathfrak{M}$-fórmulas cerradas*, nuevamente por recursión (sobre **Fbf**).

Definición 1.4.5. Para *cualquier fórmula cerrada* en **Fbf**($\mathfrak{M}$) definimos el símbolo $\mathscr{A}^{\mathscr{I}}$ recursivamente. En todos los casos, $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} \in \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$.

(1) Si $\mathscr{A} \equiv t = s$, donde t ys son $\mathfrak{M}$-términos *cerrados*, entonces $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ sii $t^{\mathscr{I}} = s^{\mathscr{I}}$. (Las dos últimas ocurrencias de "=" son metamatemáticas.)

(2) Si $\mathscr{A} \equiv P t_1 \ldots t_n$, donde P es un predicado n-ario y t_i son $\mathfrak{M}$-términos *cerrados*, entonces $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ sii $\langle t_1^{\mathscr{I}}, \ldots, t_n^{\mathscr{I}} \rangle \in P_1^{\mathscr{I}}$ o $P(t_1^{\mathscr{I}}, \ldots, t_n^{\mathscr{I}})$ "ocurre". (La última ocurrencia de "=" es metamatemática.)

(3) Si $\mathscr{A}$ es $\neg\mathscr{B}$ o es $\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$, entonces $\mathscr{A}^{\mathscr{I}}$ está determinado por las tablas de verdad (ver observación 1.2.1) usando los valores de $\mathscr{B}^{\mathscr{I}}$ y $\mathscr{C}^{\mathscr{I}}$. Es decir, $(\neg\mathscr{B})^{\mathscr{I}} = F_{\neg}(\mathscr{B}^{\mathscr{I}})$ y $(\mathscr{B}\vee\mathscr{C})^{\mathscr{I}} = F_{\neg}(\mathscr{B}^{\mathscr{I}},\mathscr{C}^{\mathscr{I}})$. (Las últimas dos ocurrencias de "=" son metamatemáticas.)

(4) Si $\mathscr{A} \equiv (\exists x)\mathscr{B}$, entonces $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ sii $(\mathscr{B}[x \leftarrow \bar{i}\,])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ *para algún* $i \in M$. (Las últimas dos ocurrencias de "=" son metamatemáticas.)

$\diamondsuit$ Hemos "importado" las constantes de M dentro de $\mathscr{L}$ para permitir establecer el significado de $(\exists x)\mathscr{B}$ de la manera simple en que lo hemos hecho (como en [Schoenfield, 1967]).

A menudo definimos el significado de $(\exists x)\mathscr{B}$ como

$$((\exists x)\mathscr{B}[x])^{\mathscr{I}} \quad \text{es verdadera sii} \quad (\exists i \in M)(\mathscr{B}[\bar{i}\,])^{\mathscr{I}} \qquad \diamondsuit$$

Definición 1.4.6. Sea $\mathscr{A} \in \mathbf{Fbf}$, y sea $\mathfrak{M}$ una estructura.

Una $\mathfrak{M}$-*instancia* es una $\mathfrak{M}$-expresión $\mathscr{A}(\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_k)$ (es decir, en donde todas las variables de $\mathscr{A}$ han sido reemplazadas por constantes importadas).

Decimos que $\mathscr{A}$ es *válida en* $\mathfrak{M}$, o que $\mathfrak{M}$ es un *modelo de* $\mathscr{A}$, sii *para todas las* $\mathfrak{M}$-instancias $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$, se cumple $\mathscr{A}'^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$.[45] Bajo estas circunstancias escribimos $\models_{\mathfrak{M}} \mathscr{A}$.

Para cualquier conjunto de fórmulas Γ de **Fbf**, , la expresión "$\mathfrak{M}$ *es un modelo de* Γ" ($\models_{\mathfrak{M}} \Gamma$) significa; *para toda* $\mathscr{A} \in \Gamma$, se tiene que $\models_{\mathfrak{M}} \mathscr{A}$.

Una fórmula $\mathscr{A}$ es *universalmente válida* o *logicamente válida* (pero sólo decimos *válida*) sii *toda estructura apropiada para el(su) lenguaje es un modelo de* $\mathscr{A}$.

Bajo estas circunstancias simplemente escribimos $\models \mathscr{A}$.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, decimos que es *satisfacible* sii tiene un modelo. Es *finitamente satisfacible* sii *todo subconjunto finito de* Γ tiene un modelo.[46]

$\diamondsuit$ La definición de validez de $\mathscr{A}$ en una estructura $\mathfrak{M}$ se corresponde con la práctica matemática normal. Dice que una fórmula es verdadera (en un "contexto" dado $\mathfrak{M}$) sólo en el caso que lo sea para todos los posibles valores de sus variables libres. $\diamondsuit$

Definición 1.4.7. Decimos que Γ *implica logicamente a* $\mathscr{A}$, en símbolos $\Gamma \models \mathscr{A}$, y quiere decir que *todo modelo de* Γ *es también modelo de* $\mathscr{A}$.

Definición 1.4.8. Correctud. Una teoría (identificada por sus axiomas no lógicos) Γ es *correcta* sii, para toda $\mathscr{A} \in \mathbf{Fbf}$, $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ implica $\Gamma \models \mathscr{A}$, es decir, sii todos los teoremas de la teoría son logicamente implicados por sus axiomas no lógicos.

[45] De aquí en adelante ya no haremos la aclaración; la última ocurrencia de "=" es metamatemática.

[46] Estos dos conceptos casi siempre se definen sólo para enunciados.

$\diamondsuit$ Claramente, una teoría *pura* $\mathfrak{T}$ es correcta sii $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}$ implica $\models \mathscr{A}$ para toda $\mathscr{A} \in \mathbf{Fbf}$. En otras palabras, todos sus teoremas son universalmente válidos. $\diamondsuit$

En camino al resultado de correctud[47], veremos dos lemas tediosos (pero fáciles).

Lema 1.4.1. *Dado un término t, variables $x \not\equiv y$, donde y no ocurre en t, y una constante a. Entonces, para cualquier término s y cualquier fórmula $\mathscr{A}$,*

$$s[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \equiv s[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \quad y \quad \mathscr{A}[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \equiv \mathscr{A}[y \leftarrow a][x \leftarrow t]$$

Demostración. Inducción sobre s:

Base.

$$\begin{aligned} s[x \leftarrow t][y \leftarrow a] &\equiv \begin{cases} t & \text{si} \quad s \equiv x \\ a & \text{si} \quad s \equiv y \\ z & \text{si} \quad s \equiv z \text{ y } x \not\equiv z \not\equiv y \\ s & \text{si} \quad s \equiv b \end{cases} \\ &\equiv s[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \end{aligned}$$

Paso inductivo. Sea $s \equiv f r_1 \ldots r_n$, donde f tiene aridad n. entonces

$$\begin{aligned} s[x \leftarrow t][y \leftarrow a] &\equiv f r_1[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \ldots r_n[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \\ &\equiv f r_1[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \ldots r_n[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \qquad \text{por H.I.} \\ &\equiv s[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \end{aligned}$$

Inducción sobre $\mathscr{A}$:

Base.

$$\begin{aligned} \mathscr{A}[x \leftarrow t][y \leftarrow a] &\equiv \begin{cases} \text{si } \mathscr{A} \equiv & P r_1 \ldots r_n \quad \text{entonces} \\ & P r_1[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \ldots r_n[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \\ \equiv & P r_1[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \ldots r_n[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \\ \text{si } \mathscr{A} \equiv & r = s \quad \text{entonces} \\ & r[x \leftarrow t][y \leftarrow a] = s[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \\ \equiv & r[y \leftarrow a][x \leftarrow t] = s[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \end{cases} \\ &\equiv \mathscr{A}[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \end{aligned}$$

*Paso Inductivo.*La propiedad se propaga trivialmente con conectivos booleanos. así que sólo haremos el paso inductivo cuando $\mathscr{A} \equiv (\exists w)\mathscr{B}$. Si $w \equiv x$ o $w \equiv y$, el resultado es inmediato. En otro caso

$$\begin{aligned} \mathscr{A}[x \leftarrow t][y \leftarrow a] &\equiv ((\exists w)\mathscr{B})[x \leftarrow t][y \leftarrow a] \\ &\equiv ((\exists w)\mathscr{B}[x \leftarrow t][y \leftarrow a]) \\ &\equiv ((\exists w)\mathscr{B}[y \leftarrow a][x \leftarrow t]) \quad \text{Por H.I.} \\ &\equiv ((\exists w)\mathscr{B})[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \\ &\equiv \mathscr{A}[y \leftarrow a][x \leftarrow t] \end{aligned}$$

$\square$

[47]También conocido como “la parte fácil del teorema de completud de Gödel.

Lema 1.4.2. *Dada una estructura $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$, un término s y una fórmula $\mathscr{A}$ (sobre $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$). Sugongamos que s y $\mathscr{A}$ tienen, cada una, a lo mas* una *variable libre, x.*

Sea t un término cerrado sobre $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$, tal que $t^{\mathscr{I}} = i \in M$. Entonces

$$(s[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} = (s[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} \quad y \quad (\mathscr{A}[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} = (\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}}$$

Es claro que, como t es término cerrado, $\mathscr{A}[x \leftarrow t]$ está definida.

Demostración. Inducción sobre s:

Base. $s[x \leftarrow t] \equiv s$ si $s \in \{y, a, \overline{j}\}$ $(y \not\equiv x)$.Por consiguiente, en este caso, $(s[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} = s^{\mathscr{I}} = (s[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}}$. Si $s \equiv x$, entonces $s[x \leftarrow t] \equiv t$ y $s[x \leftarrow \overline{i}\,] \equiv \overline{i}$, y nuevamente se cumple el lema.

Paso inductivo. Sea $s \equiv f r_1 \ldots r_n$, donde f tiene aridad n. Entonces

$$\begin{aligned} (s[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} &= f^{\mathscr{I}}((r_1[x \leftarrow t\,])^{\mathscr{I}} \ldots (r_n[x \leftarrow t\,])^{\mathscr{I}}) \\ &= f^{\mathscr{I}}((r_1[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} \ldots (r_n[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}}) \qquad \text{por H.I.} \\ &= (s[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} \end{aligned}$$

Inducción sobre $\mathscr{A}$:

Base. Si $\mathscr{A} \equiv P r_1 \ldots r_n$, donde P tiene aridad n. Entonces[48]

$$\begin{aligned} (\mathscr{A}[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} &= P^{\mathscr{I}}((r_1[x \leftarrow t\,])^{\mathscr{I}} \ldots (r_n[x \leftarrow t\,])^{\mathscr{I}}) \\ &= P^{\mathscr{I}}((r_1[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} \ldots (r_n[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}}) \qquad \text{por H.I.} \\ &= (\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} \end{aligned}$$

Similarmente si $\mathscr{A} \equiv r = s$.

Paso Inductivo. La propiedad se propaga trivialmente con los conectivos booleanos, así que sólo probaremos el caso $\mathscr{A} = (\exists w)\mathscr{B}$. Si $w \equiv x$, el resultado es inmediato. En otro caso, notemos que –como t es cerrado– w no ocurre en t, y procedemos como sigue

$$\begin{aligned} (\mathscr{A}[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \quad &\text{sii} \quad (((\exists w)\mathscr{B})[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \\ &\text{sii} \quad (((\exists w)\mathscr{B}[x \leftarrow t]))^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \\ &\text{sii} \quad (\mathscr{B}[x \leftarrow t][w \leftarrow \overline{j}\,])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \text{ para alguna } j \in M, \text{ (def. 1.4.5(4))} \\ &\text{sii} \quad (\mathscr{B}[w \leftarrow \overline{j}\,][x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \text{ para alguna } j \in M, \text{ (lema 1.4.1)} \\ &\text{sii} \quad ((\mathscr{B}[w \leftarrow \overline{j}\,])[x \leftarrow t])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \text{ para alguna } j \in M \\ &\text{sii} \quad ((\mathscr{B}[w \leftarrow \overline{j}\,])[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \text{ para alguna } j \in M, \text{ (H.I.)} \\ &\text{sii} \quad (\mathscr{B}[w \leftarrow \overline{j}\,][x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \text{ para alguna } j \in M \\ &\text{sii} \quad (\mathscr{B}[x \leftarrow \overline{i}\,][w \leftarrow \overline{j}\,])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \text{ para alguna } j \in M, \text{ (lema 1.4.1)} \\ &\text{sii} \quad (((\exists w)\mathscr{B}[x \leftarrow \overline{i}\,]))^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \text{ (def. 1.4.5(4))} \\ &\text{sii} \quad (((\exists w)\mathscr{B})[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \\ &\text{sii} \quad (\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}\,])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \end{aligned}$$

[48]Para una relación metamatemática Q; $Q(a, b, \ldots) = \mathbf{t}$ o simplemente $Q(a, b, \ldots)$ son notaciones para $(a, b, \ldots) \in Q$

□

Metateorema 1.4.1. Correctud. *Cualquier teoría de primer orden (identificada por sus axiomas no lógicos)* Γ, *sobre algún lenguaje* $\mathscr{L}$, *es correcta.*

Demostración. Demostraremos que $\Gamma \models \mathscr{A}$ por inducción sobre Γ-teoremas, $\mathscr{A}$. Es decir, fijamos una estructura $\mathfrak{M}$ para $\mathscr{L}$ y suponemos que $\models_{\mathfrak{A}} \Gamma$. Procedemos entonces a mostrar que $\models_{\mathfrak{M}} \mathscr{A}$.

Base. Si $\mathscr{A}$ es axioma no lógico, entonces no hay nada que probar (pues está en la suposición), por definición 1.4.6. Si $\mathscr{A}$ es un axioma lógico, tenemos algunos casos:

Caso 1. $\models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}$. Sea $\mathscr{A}'$ una $\mathfrak{M}$-instancia de $\mathscr{A}$, hay que demostrar que $\mathscr{A}'^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. Sean $p_1, \ldots, p_n$ *todas las variables proposicionales* (alias fórmulas primas) que ocurren en $\mathscr{A}'$. Definimos una valuación v tomando simplemente $v(p_i) = p_i^{\mathscr{I}}$ para $i = 1, \ldots, n$. Claramente $\mathbf{t} = \bar{v}(\mathscr{A}') = \mathscr{A}'^{\mathscr{I}}$ (el primer "=" es porque $\models_{Taut} \mathscr{A}'$, el segundo porque despues de habernos ocupado de las fórmulas primas, todo lo que falta hacer, para evaluar a $\mathscr{A}'^{\mathscr{I}}$, es aplicar los conectivos booleanos, ver definición 1.4.5(3)).
Pausa. ¿Porqué $\models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}'$?

Caso 2. $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}[t] \to (\exists x)\mathscr{B}$. Nuevamente, tomamos un $\mathfrak{M}$-instancia $\mathscr{B}'[t'] \to (\exists x)\mathscr{B}'$. Quermos que $(\mathscr{B}'[t'] \to (\exists x)\mathscr{B}')^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$, pero en vez de eso supondremos que

$$(\mathscr{B}'[t'])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \tag{1}$$

y que

$$((\exists x)\mathscr{B}')^{\mathscr{I}} = \mathbf{f} \tag{2}$$

Sea $t'^{\mathscr{I}} = i$ ($i \in M$), Por lema 1.4.2 y (1), $(\mathscr{B}'[\bar{i}])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. Por definición 1.4.5(4), $((\exists x)\mathscr{B}')^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$, contradiciendo (2).

Caso 3. $\mathscr{A} \equiv x = x$. Entonces una $\mathfrak{M}$-instancia es $\bar{i} = \bar{i}$ para algún $i \in M$. Por definición 1.4.5(1), $(\bar{i} = \bar{i})^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$.

Caso 4. $\mathscr{A} \equiv t = s \to (\mathscr{B}[t] \leftrightarrow \mathscr{B}[s])$. Una vez mas, tomamos una $\mathfrak{M}$-instancia arbitraria, $t' = s =' \to (\mathscr{B}'[t'] \leftrightarrow \mathscr{B}'[s'])$. Supongamos que $(t' = s')^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. En otras palabras, $t'^{\mathscr{I}} = s'^{\mathscr{I}} = i$ para alguna $i \in M$. Pero entonces

$$\begin{aligned}(\mathscr{B}'[t'])^{\mathscr{I}} &= (\mathscr{B}'[\bar{i}])^{\mathscr{I}} \quad \text{por } 1.4.2\\ &= (\mathscr{B}'[s'])^{\mathscr{I}} \quad \text{por } 1.4.2\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\mathscr{B}[t] \leftrightarrow \mathscr{B}[s])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$.

Para el paso inductivo tenemos dos casos:

Modus Ponens. Sean $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ Γ-teoremas. Ahora fijemos una $\mathfrak{M}$-instancia $\mathscr{B}' \to \mathscr{A}'$. Como $\mathscr{B}', \mathscr{B}' \to \mathscr{A}' \models_{\mathbf{Taut}} \mathscr{A}'$, el argumento es análogo al caso en que $\mathscr{A} \in \Lambda$ (Por lo que se omite).

$\exists$-*cuantificación.* Sea $\mathscr{A} \equiv (\exists x)\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ y $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, donde x no ocurre libre en $\mathscr{C}$. Por H.I.

$$\models_{\mathfrak{M}} \mathscr{B} \to \mathscr{C} \tag{3}$$

Supongamos que $(\exists x)\mathscr{B}' \to \mathscr{C}'$ es una $\mathfrak{M}$-instancia tal que (a pesar de lo esperado) $((\exists x)\mathscr{B}')^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$, pero

$$\mathscr{C}'^{\mathscr{I}} = \mathbf{f} \tag{4}$$

Así

$$\mathscr{B}'[\bar{i}\,]^{\mathscr{I}} = \mathbf{t} \tag{5}$$

para algún $i \in M$. Como x no es libre en $\mathscr{C}$, tenemos que $\mathscr{B}'[\bar{i}\,] \to \mathscr{C}'$ es una $\mathfrak{M}$-instancia falsa (por (4 y 5) de $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$, contradiciendo (3).

$\square$

$\diamondsuit$ Hemos usado la condicion sobre la $\exists$-cuantificación de arriba en: "Como x no es libre en $\mathscr{C}$, tenemos que $\mathscr{B}'[\bar{i}\,] \to \mathscr{C}'$ es una $\mathfrak{M}$-instancia falsa de $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$".

Así, la condición fue útil, pero ¿Es esencial? Si, ya que, por ejemplo, si $x \not\equiv y$, entonces $x = y \to x = y \not\models (\exists x)x = y \to x = y$. $\diamondsuit$

Como un corolario de correctud tenemos la consistencia de las teorias puras:

Corolario 1.4.1. *Toda teoría de primer orden es consistente.*

Demostración. Sea $\mathfrak{T}$ una teoría pura sobre un lenguaje $\mathscr{L}$. Como $\not\models \neg x = x$, se sigue que $\nvdash_{\mathfrak{T}} \neg x = x$, por lo tanto $\mathscr{T} \neq \mathbf{Fbf}$. $\square$

Corolario 1.4.2. *Cualquier teoría de primer orden que tiene un modelo es consistente.*

Demostración. Sea $\mathfrak{T}$ una teoría pura sobre un lenguaje $\mathscr{L}$, y $\mathfrak{M}$ un modelo de $\mathfrak{T}$. Como $\not\models_{\mathfrak{M}} \neg x = x$, se sigue que $\nvdash_{\mathfrak{T}} \neg x = x$, por lo tanto $\mathscr{T} \neq \mathbf{Fbf}$. $\square$

$\diamondsuit$ *Definibilidad (en primer orden) en una estructura:* Estamos en posición de realizar el proceso de traducción a (y desde) las matemáticas informales, de manera rigurosa.

Definición 1.4.9. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathfrak{M}$ una estructura para $\mathscr{L}$. Un *conjunto* (*relación*, como sinónimo) $S \subseteq M^n$ es *(primer orden) definible en* $\mathfrak{M}$ *sobre* $\mathscr{L}$ sii para alguna fórmula $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ (recordar la notación sobre paréntesis en las fórmulas) y para toda $i_j \in M$, donde $j = 1, \dots, n$

$$\langle i_1, \dots, i_n \rangle \quad \text{sii} \quad \models_{\mathfrak{M}} \varphi(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n)$$

A menudo decimos solamente “definible en $\mathfrak{M}$”.

Una función $f : M^n \to M$ es definible en $\mathfrak{M}$ sobre $\mathscr{L}$ sii la relación $y = f(x_1,\ldots,x_n)$ es definible.

N.B. Algunos refieren “(primer orden) *expresable*” ([Smullyan, 1992]) en vez vez de “(primer orden) definible” en una estructura.

En el contexto de ($\mathfrak{M}$), la definición anterior da precisión a dichos como “codificamos (o traducimos) una expresión informal dentro del lenguaje formal” o “la fórmula $\mathscr{A}$ (del lenguaje formal) ‘dice’ ..., informalmente”, ya que cualquier “expresión”, o relación, informal que depende de las variables informales $x_1,\ldots,x_n$ tiene la forma “$\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in S$” para algún conjunto (informal) S. También captura la esencia de la expresión.

“La expresión (informal) $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in S$ puede ser *escrita* (o *hecha*) en el *lenguaje formal*.”

Lo que “hace” la expresión, *en el lenguaje formal*, es la fórmula φ que lo define.

Ejemplo 1.4.1. La expresión informal “z es primo” tiene una traducción formal

$$\mathbf{S0} < \mathbf{z} \wedge (\forall \mathbf{x})(\forall \mathbf{y})(\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \to \mathbf{x} = \mathbf{z} \vee \mathbf{x} = \mathbf{S0})$$

sobre el lenguaje de la teoría de números elemental, donde los símbolos no lógicos son $\mathbf{0}, \mathbf{S}, +, \times, <$ y la definición (traducción) se realiza en la *estructura estándar* $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; 0; S, +, \times; <)$, donde “$S$” satisface, para toda $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = n+1$ y así interpreta a “$\mathbf{S}$” (ver observación 1.4.1 para la notación “explícita” que hemos usado para denotar la estructura $\mathfrak{N}$). Hemos utilizado la variable “z” en ambos sentidos (formal e informal).

Hay que decir que la codificación no es un arte o destreza. Hay limitantes teóricas a la traducción. La limitación trivial es que si M es un conjunto infinito y $\mathscr{L}$ tiene un conjunto finito de símbolo no lógicos (como en la teor ia de números o en la teoría de conjuntos),[49] no podemos definir *todos* los $S \subseteq M$, simplemente porque no tenemos las suficientes fórmulas para hacerlo.

$\diamondsuit$ Es buen momento para introducir *argot* notacional común que nos permita escribir fórmulas “de modo mixto”, que tienen una parte formal (sobre el lenguaje $\mathscr{L}$) y que, por otra parte, pueden contener constantes “informales” (nombres de ellas, por supuesto, pero nombres que *no* han sido formalmente importados en $\mathscr{L}$) de alguna estructura $\mathfrak{M}$ apropiada para $\mathscr{L}$.

Definición Informal 1.4.1. Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$ una estructura para $\mathscr{L}$. Sea $\mathscr{A}$ una fórmula con a lo más $x_1,\ldots,x_n$ variables libres, y $i_1,\ldots,i_n$ elementos de M. La notación $\mathscr{A}[[i_1,\ldots,i_n]]$ es una abrevación para $(\mathscr{A}[\overline{i}_1,\ldots,\overline{i}_n])^{\mathscr{I}}$.

[49] Parece que hay que clarificar esto.

Este *argot* nos permite sustituir objetos informales en variables directamente, pasando por alto el procedimiento de importar nombres formales para tales objetos dentro del lenguaje. Es importante mencionar que las fórmulas "de modo mixto" de pueden definir *directamente* por inducción sobre fórmulas –esto es, sin construir $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$ antes– como sigue:

Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathfrak{M}$ una estructura para $\mathscr{L}$. Sean $x_1,\ldots,x_n$ todas las variables libres que aparecen en un término t o en una fórmula $\mathscr{A}$ sobre $\mathscr{L}$ (¡No sobre $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$!). Sean $i_1,\ldots,i_n$ en M arbitrarios.

Para términos definimos

$$t[[i_1,\ldots,i_n]] = \begin{cases} i_j & \text{si } t \equiv x_j \ (1 \le j \le n) \\ a^{\mathscr{I}} & \text{si } t \equiv a \\ f^{\mathscr{I}}(t_1[[i_1,\ldots,i_n]],\ldots,t_r[[i_1,\ldots,i_n]]) & \text{si } t \equiv f t_1 \ldots t_r \end{cases}$$

Para términos tenemos

$$\mathscr{A}[[i_1,\ldots,i_n]] = \begin{cases} t[[i_1,\ldots,i_n]] = s[[i_1,\ldots,i_n]] & \text{si } \mathscr{A} \equiv t = s \\ P^{\mathscr{I}}(t_1[[i_1,\ldots,i_n]],\ldots,t_r[[i_1,\ldots,i_n]]) & \text{si } \mathscr{A} \equiv P t_1,\ldots,t_r \\ \neg(\mathscr{B}[[i_1,\ldots,i_n]]) & \text{si } \mathscr{A} \equiv \neg\mathscr{B} \\ (\mathscr{B}[[i_1,\ldots,i_n]] \vee \mathscr{C}[[i_1,\ldots,i_n]]) & \text{si } \mathscr{A} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \\ (\exists a \in M)\mathscr{B}[[a,i_1,\ldots,i_n]] & \text{si } \mathscr{A} \equiv (\exists z)\mathscr{B}[z,\vec{x}_n] \end{cases}$$

donde "$(\exists a \in M)\ldots$" abrevia "$(\exists a)(a \in M \wedge \ldots)$". El lado derecho no tiene variables libres (informales); entonces toma uno de los valores **t** o **f**. ◊

Ahora nos enfocaremos en la "mitad difícil" del teorema de completud de Gödel, que nuestro aparato de pruebas sintácticas pueda fielmente imitar las "pruebas por implicación lógica". Es decir, que nuestro aparato sintáctico sea "completo".

Definición 1.4.10. Una teoría sobre $\mathscr{L}$ (identificada por sus axiomas no lógicos) Γ es *semánticamente completa* sii $\Gamma \models \mathscr{A}$ implica $\Gamma \vdash \mathscr{A}$, para cualquier fórmula $\mathscr{A}$.

◊ El término "semánticamente completa" no es usado comúnmente. Existe una noción *sintáctica* de completud compitiendo (?), la *completud simple*, también conocida como *completud*. La última es la noción que uno tiene en mente cuando dice "...una teoría completa...". Hablaremos de esto pronto. ◊

Mostraremos la completud semántica de *toda* teoría de primer orden demostrando, via la técnica de [Henkin, 1952], el teorema de la consistencia. El teorema de completud se obtendrá como un corolario.

Metateorema 1.4.2. Teorema de la Consistencia. *Si una teoría (de primer orden) $\mathfrak{T}$ es consistente, entonces tiene modelo.*

Primero daremos una demostración (via una sucesión de lemas) para el caso de "lenguajes contables" $\mathscr{L}$, es decir, lenguajes que tienen un *alfabeto contable*. Mejoraremos despés la prueba para incuir el caso no contable.

Para probar el teorema de la consistencia, fijemos un lenguaje contable $\mathscr{L}$ y una teoría de primer orde $\mathfrak{T}$ sobre $\mathscr{L}$ con axiomas no lógicos Λ. En la búsqueda de un modelos, comenzamos con un conjunto contables simple, aquí tomaremos $\mathbb{N}$,y terminaremos con una estructura suficiente (la parte $\mathscr{I}$) para obtener un modelo, $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$, de $\mathfrak{T}$. Ya que, en particular, esto permite que un subconjunto de $\mathbb{N}$ (que llamaremos M, en lo sucesivo) sea el dominio de la estructura, importamos todas las constantes $n \in \mathbb{N}$ dentro de $\mathscr{L}$. Es decir, agregamos a $\mathscr{V}$ un *nuevo* símbolo constante $\bar{n}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. El nuevo alfabeto se denota por $\mathscr{V}(\mathbb{N})$ y el lenguaje resultante por $\mathscr{L}(\mathbb{N})$.

Definición 1.4.11. En general, sea $L = (\mathscr{V}, \mathbf{TERM}, \mathbf{Fbf})$ un lenguaje de primer orden y M un conjunto. Agregamos un *nuevo* símbolo $\bar{i}$ *para cada* $i \in M$. El nuevo lenguaje se denota por $L(M) = (\mathscr{V}(M), \mathbf{TERM}(M), \mathbf{Fbf}(M))$ y el nuevo alfabeto por $\mathscr{V}(M)$.

Este concepto se debe a Henkin y Abraham Robinson, El lenguaje $L(M)$ así aumentado es llamado *el lenguaje diagrama de* M.

La definición anterior generaliza la definición 1.4.3 y es útil cuando (como ocurre en nuestro contexto actual) tenemos un lenguaje L y un conjunto (aqui $\mathbb{N}$), pero, no tenemos, todavía, una estrcutura para L con dominio $\mathbb{N}$ (o algún subconjunto del mismo).

Por supuesto, si $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$, entonces $L(M) = L(\mathfrak{M})$.

$\diamondsuit$ Dos observaciones son inmediatas: Uno, Γ no ha sido afectado por la adición de las nuevas constantes. Dos, $L(\mathbb{N})$ sigue siendo contable.[50] Así, hay enumeraciones

$$\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots \quad \text{de todas las expresiones en } \mathbf{Fbf}(\mathbb{N}) \tag{1}$$

y

$$\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \mathscr{G}_3, \ldots \quad \text{de todas las expresiones en } \mathbf{Fbf}(\mathbb{N}) \text{ de la forma } (\exists x)\mathscr{A} \tag{2}$$

donde, en (2), toda expresión $(\exists x)\mathscr{A}$ de $\mathbf{Fbf}(\mathbb{N})$ a menudo es listada una cantidad infinita de veces. $\diamondsuit$

Meditación 1.4.1. ¿Cómo podemos hacer esto? Formamos una matriz infinita, donde cada file es una misma enumeración fija de las $(\exists x)\mathscr{A}$ expresiones. Entonces desplegamos la matriz en una sola fila.

[50] Si A y B son contables, entonces también $A \cup B$ lo es, ya que podemos arreglar la unión como una matriz infinita, donde la 0-ésima fila está ocupada por los elementos de A y las restantes con alguna enumeración fija de B.

Con los preeliminares fuera de nuestro camino, procedemos a definir por inducción (recursión) sobre $\mathbb{N}$ una secuencia infinita de teorías, sucesivamente, agregando enunciado sobre $L(\mathbb{N})$ como axiomas no lógicos: Tomamos $\Gamma_0 = \Gamma$. Para cualquier $n \geq 0$, definimos Γ_{n+1} en dos etapas: Primero tomamos

$$\Delta_n = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\mathscr{F}_n\} & \text{si } \Gamma_n \nvdash \neg\mathscr{F}_n \\ \Gamma_n & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3}$$

Después, tomamos

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\mathscr{A}[x \leftarrow \bar{i}\} & \text{si } \Delta_n, \text{ donde } \mathscr{G}_{n+1} \equiv (\exists x)\mathscr{A} \\ \Delta_n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

◊ La elección de i es importante: Es *el más pequeño* i tal que la constante $\bar{i}$ no ocurre (como subexpresión) en alguna de las sentencias

$$\mathscr{F}_0, \ldots, \mathscr{F}_n, \mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_{n+1} \tag{4}$$

La expresión $\mathscr{A}[x \leftarrow \bar{i}]$ agregada a Γ_{n+1} es llamada un *axioma especial de Henkin*.[51] La constante $\bar{i}$ es la constante asociada de Henkin (también llamada *testigo*). ◊

Ahora tomamos

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \tag{5}$$

Este es un conjunto de fórmulas sobre **Fbf**($\mathbb{N}$) que define una teoría $\mathfrak{T}_\infty$ sobre **Fbf**($\mathbb{N}$) (como el conjunto de axiomas no lógicos de $\mathfrak{T}_\infty$).

Lema 1.4.3. *La teoría $\mathfrak{T}_\infty$ es consistente*

Demostración. Es suficiente mostrar que cada uno de las teorías Γ_n es consistente (En efecto, si $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty} \neg x = x$,[52] entonces $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_m \vdash \neg x = x$, para alguna $\mathscr{A}_i$ (con $i = 1, \ldots, m$) en Γ_∞, ya que las pruebas tienen longitud finita. Sea Γ_n tal que incluya a todas las siguientes $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_m$. Entonces Γ_n resulta ser inconsistente).

Pausa. ¿Existe tal Γ_n?

Sobre nuestra tarea principal. Sabemos (lo asumimos como hipótesis) que Γ_0 es consistente. Como H.I. consideramos que Γ_n es consistente, y veremos que pasa con Γ_{n+1}.

Primero, afirmamos que Δ_n es consistente. Si $\Delta_n = \Gamma_n$, no hay nada mas que hacer , por H.I. Si $\Delta_n = \Gamma_n \cup \{\mathscr{F}_n\}$, entonces la inconsistecia implicaría que $\Gamma \vdash \neg\mathscr{F}_n$ (por corolario 1.3.7), contradiciendo la hipótesis del caso en que estamos (el numeral (3) de antes).

---

[51]Otra posible elección para el axioma de Henkin en $(\exists x)\mathscr{A} \to \mathscr{A}[x \leftarrow \bar{i}]$.

[52]$\neg x = x$ es nuestra favorita "constructora de contradicciones" (ver metateorema 1.3.9).

Ahora, mostraremos que $\Delta_n \cup \{\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}]\}$ es consistente, donde $\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}]$ es el axioma de Henkin agregado – si de verdad *fue* agregado.

Supongamos al contrario que $\Delta_n \cup \{\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}]\} \vdash \neg z = z$, para alguna variable z. Ahora $\overline{i}$ no ocurre en niguna de las fórmulas en el conjunto $\Delta_n \cup \{(\exists x)\mathscr{A}, \neg z = z\}$.

Como $(\exists x)\mathscr{A} \equiv \mathscr{G}_{n+1}$ y $\Delta_n \vdash \mathscr{G}_{n+1}$, tenemos que $\Delta_n \vdash \neg z = z$ por metateorema 1.3.14 (metateorema de constantes auxiliares). Esto no es bueno, ya que Δ_n se suponía es consistente. $\square$

Definición 1.4.12. Una teoría $\mathfrak{T}$ sobre *L decide* un enunciado $\mathscr{A}$ sii $\vdash_{\mathfrak{T}} \mathscr{A}$ o $\vdash_{\mathfrak{T}} \neg\mathscr{A}$. Decimos que $\mathscr{A}$ *es decidible por* $\mathfrak{T}$. En caso de que $\vdash_{\mathfrak{T}} \neg\mathscr{A}$ decimos que $\mathfrak{T}$ refuta a $\mathscr{A}$. $\mathfrak{T}$ es *simplemente completa*, o *completa*, sii todo enunciado es decidible por $\mathfrak{T}$.

◇ Esta definición es frecuentemente dada en término de teorías consistentes, pues una teoría inconsistente decide cualquier fórmula. ◇

Lema 1.4.4. *$\mathfrak{T}_\infty$ es simplemente completa.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ un enunciado. Entonces $\mathscr{A} \equiv \mathscr{F}_n$ para alguna n. Si $\Gamma_n \vdash \neg\mathscr{F}_n$, entonces ya hemos terminado. Si, en cambio, Γ_n no refuta a $\mathscr{F}_n$, hemos terminado por (3) p.65 f.r. $\square$

Lema 1.4.5. *$\mathfrak{T}_\infty$ tiene la* propiedad testimonial,[53] *a saber, cuando $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty} (\exists x)\mathscr{A}$, donde $(\exists x)\mathscr{A}$ es un enunciado sobre $L(\mathbb{N})$, entonces para alguna $m \in \mathbb{N}$* tenemos que $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty} \mathscr{A}[x \leftarrow \overline{m}]$.

Demostración. Ya que la prueba $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty} (\exists x)\mathscr{A}$ involucra una cantidad finita de fórmulas de Γ_∞, hay una $n \geq 0$ tal que $\Delta_n \vdash (\exists x)\mathscr{A}$. Ahora, $(\exists x)\mathscr{A} \equiv \mathscr{G}_{k+1}$ para alguna $k \geq n$ ya que $(\exists x)\mathscr{A}$ ocurre en la secuencia (2)p.64 de las páginas anteriores una cantidad infinita de veces. Pero entonces $\Delta_k \vdash (\exists x)\mathscr{A}$ también.
¿Porqué?

Por consiguiente, $\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{m}]$ is agregado a Γ_{k+1} como un axioma de Henkin, para una constante de Henkin apropiada $\overline{m}$, y así terminamos. $\square$

Definición 1.4.13. Definimos una relación, $\sim$, en $\mathbb{N}$ como

$$n \sim m \quad \text{sii} \quad \vdash_{\mathfrak{T}_\infty} \overline{n} = \overline{m} \tag{6}$$

$\sim$ tiene las siguientes propiedades:

(a) *Reflexividad.* $n \sim n$ (para toda n): Por $\vdash x = x$ y un teorma de la sección anterior.

[53] También decimos que en una *teoría de Henkin*.

(b) *Simetría.* Si $n \sim m$, entonces $m \sim n$ (para todas n,m): Se sigue de $\vdash x = y \to y = x$ (Ejercicio **??**) y corolario 1.3.4.

(c) *Transitividad.* Si $n \sim m$ y $m \sim k$, entonces $n \sim k$ (para todas m,n,k): Se sigue de $\vdash x = y \to y = z \to x = z$ (Ejercicio **??**) y corolario 1.3.4.

Definimos una función $f;\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como

$$f(n) = \text{ el menor } m \text{ tal que } m \sim n \tag{7}$$

Por el item (a) anterior, f está totalmente definida. También definimos un subconjunto M de $\mathbb{N}$ como

$$M = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\} \tag{8}$$

Este M será el dominio de una estructura que construiremos, y que mostraremos como un modelo de la teoría original $\mathfrak{T}$.

Primero, modificamos Γ_∞ "hacia abajo".

Definición 1.4.14. La M-restricción de una fórmula $\mathscr{A}$ es la fórmula $\mathscr{A}^M$, obtenida de $\mathscr{A}$ reemplazando cualquier ocurrencia de $\overline{n}$ en $\mathscr{A}$ por $\overline{f(n)}$.

Permitamos

$$\Gamma_\infty^M = \{\mathscr{A}^M : \mathscr{A} \in \Gamma_\infty\} \tag{9}$$

Tenemos los siguientes resultados respecto a Γ_∞^M (o la teoría asociada $\mathfrak{T}_\infty^M$):

Observación 1.4.2. $\diamondsuit$ Antes de proceder, notemos que el lenguaje de $\mathfrak{T}_\infty^M$ es $L(M)$, y que $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}^M$ si $\mathscr{A}$ está sobre $L(M)$, ya que $f(m) = m$ para $m \in M$ (¿Porqué?). $\diamondsuit$

Lema 1.4.6. *Sea $\mathscr{A}$ sobre $L(\mathbb{N})$. Si $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty} \mathscr{A}$, entonces $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty^M} \mathscr{A}^M$.*

Demostración. Inducción sobre $\mathfrak{T}_\infty$-teoremas.

Base. Si $\mathscr{A} \in \Gamma_\infty$, entonces $\mathscr{A}^M \in \Gamma_\infty^M$ por (9). Si $\mathscr{A} \in \Lambda$, entonces $\mathscr{A}^M \in \Lambda$ (¿Porqué?).

Modus Ponens. Sea $\Gamma_\infty \vdash \mathscr{B}$ y $\Gamma_\infty \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Por H.I., $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B}^M$ y $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B}^M \to \mathscr{A}^M$, y hemos terminado.

$\exists$*-cuantificación.* Sea $\Gamma_\infty \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, donde x no es libre en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{A} \equiv (\exists x)\mathscr{B} \to \mathscr{C}$. Por H.I., $\Gamma_\infty^M \mathscr{B}^M \to \mathscr{C}^M$ y hemos terminados la $\exists$-cuantificación. □

Lema 1.4.7. *$\mathfrak{T}_\infty^M \leq \mathscr{T}_\infty$, conservativamente.*

Demostración. Dejando la parte "conservativa" momentáneamente de lado, verificaremos que para toda $\mathscr{A}$ sobre $L(\mathbb{N})$

$$\Gamma_\infty \vdash \mathscr{A}^M \leftrightarrow \mathscr{A} \tag{$*$}$$

Esto se sigue de que $\Gamma_\infty \vdash \overline{n} = \overline{f(n)}$ (recordar que $n \sim f(n)$ por definición de f) para toda $n \in \mathbb{N}$, y del ejercicio **??**.

A causa de $(*)$, Γ_∞ puede probar cualquier $\mathscr{B} \in \Gamma_\infty^M$. En efecto, sea $\mathscr{B} \equiv \mathscr{A}^M$ para alguna $\mathscr{A} \in \Gamma_\infty$ (por (9)). Por $(*)$ y $\Gamma_\infty \vdash \mathscr{A}$, obtenemos $\Gamma_\infty \vdash \mathscr{B}$.

Así, $\mathfrak{T}_\infty^M \leq \mathscr{T}_\infty$.

Pausa. ¿Crees esta conclusión?

Volviendo a la parte conservativa, esto se sigue del lema 1.4.6 y la observación 1.4.2. □

Corolario 1.4.3. *$\mathfrak{T}_\infty^M$ es consistente*

Demostración. Si él puede probar $\neg x = x$, entonces $\mathfrak{T}_\infty$ también puede hacerlo. □

Lema 1.4.8. *$\mathfrak{T}_\infty^M$ es* simplemente completa.

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ un enunciado sobre $L(M)$. Es decidible por $\mathfrak{T}_\infty$ (lema 1.4.4). Por lema 1.4.6, $\mathfrak{T}_\infty^M$ decide $\mathscr{A}^M$. Pero eso es $\mathscr{A}$. □

Lema 1.4.9. *$\mathfrak{T}_\infty^M$ es una teoría de Henkin sobre $L(M)$.*

Demostración. Sea $\Gamma_\infty^M \vdash (\exists x)\mathscr{A}$, donde $(\exists x)\mathscr{A}$ es un enunciado. Entonces $\Gamma_\infty \vdash (\exists x)\mathscr{A}$, por tanto $\Gamma_\infty \vdash \mathscr{A}[x \leftarrow \overline{n}]$, para alguna $n \in \mathbb{N}$ (por lema 1.4.5.)

Se sigue que $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{A}^M[x \leftarrow \overline{f(n)}]$, y así hemos terminado, ya que $\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}^M$ y $f(n) \in M$. □

Lema 1.4.10. *$\mathfrak{T}_\infty^M$* distigue las constantes de *M, es decir, si $n \neq m$ (ambos en M), entonces $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty^M} \neg\overline{n} = \overline{m}$*

Demostración. Por lema 1.4.8, si $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty^M} \neg\overline{n} = \overline{m}$ falla, entonces $\vdash_{\mathfrak{T}_\infty^M} \overline{n} = \overline{m}$; así que $n \sim m$. Por la definición de $f(n)$ y M (p.67), se sigue que $n = m$ (porque cada conjunto $\{m \in \mathbb{N} : n \sim m\}$ determinado por n puede tener sólo un elemento "más pequeño", y cualesquiera dos de tales conjuntos –determinados por n y k– no tienen elementos en común (¿Porqué?)). Esto contradice nuestra suposicióm de que $n \neq m$. □

◊ Empezamos con una teoría consistente $\mathfrak{T}$ sobre L. Ahora tenemos una extensión $\mathfrak{T}_\infty^M$ (de $\mathfrak{T}$) *consistente*, *completa* y *de Henkin* sobre un lenguaje $L(M)$ ($M \subseteq \mathbb{N}$), que *distingue las constantes de M*.

Estamos listos para definir nuestro modelos $\mathfrak{M} = (M, \mathscr{I})$. Es importante hacer notar que las constante de M también son importados al lenguaje, como lo requieren las definiciones 1.4.4 y 1.4.5. ◊

Para cualquier predicado[54] P de L con aridad k, definimos para $n_1 \ldots, n_k$ en M arbitrarias

$$P^{\mathscr{I}}(n_1, \ldots, n_k) = \mathbf{t} \quad \text{sii} \quad \Gamma^M_\infty \vdash P\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k \tag{A}$$

es decir, definimos el conjuntos de k-adas (relación) $P^{\mathscr{I}}$ como

$$P^{\mathscr{I}} = \{\langle n_1, \ldots, n_k\rangle : \Gamma^M_\infty \vdash P\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k\} \tag{A'}$$

Sea después f una letra funcional de aridad k, y sea $n_1, \ldots, n_k$ una entrada para $f^{\mathscr{I}}$. ¿Qué es una salida apropiada?[55]

Bueno, observemos primero que $\Gamma^M_\infty \vdash (\exists x) f\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k = x$ (¿Porqué?. Por lema 1.4.8, hay $m \in M$ tal que

$$\Gamma^M_\infty \vdash f\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k = \overline{m} \tag{B}$$

Necesitamos que m sea único. Para ello, si tamién $\Gamma^M_\infty \vdash f\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_k = \overline{j}$, entonces (ejercicio **??**) $\Gamma^M_\infty \vdash \overline{m} = \overline{j}$, y luego $m = j$ (si $m \neq j$, entonces $\Gamma^M_\infty \vdash \neg\overline{m} = \overline{j}$, por lema 1.4.9 –imposibles, porque Γ^M_∞ es consistente).

Para la entrada $n_1, \ldots, n_k$ tomemos

$$f^{\mathscr{I}}(n_1, \ldots, n_k) = m \tag{B.1}$$

donde m está unicamente determinado por (B). Esto define $f^{\mathscr{I}}$.

El caso de las constantes es un de especial interés.[56] Como antes, tomamos $a^{\mathscr{I}}$ como *elúnico* $m \in M$ tal que

$$\Gamma^M_\infty \vdash a = \overline{m} \tag{C}$$

La observación interesante (necesaria por la definición 1.4.4), sin duda crucial,es que para cualquier constante importada $\overline{m}$, tenemos ue $\overline{m}^{\mathscr{I}} = m$. De hecho, esto se sigue de la unicidad y el hecho trivial $\Gamma^M_\infty \vdash \overline{m} = \overline{m}$.

La siguiente igualdad será de gran ayuda en la prueba del lema principal de esta sección

$$\Gamma^M_\infty \vdash t = \overline{t^{\mathscr{I}}} \tag{D}$$

para cualquier término cerrado sobre $L(M)$. Probaremos (D) por inducción sobre los término t.

Base. Si $t \equiv a$ (a constante original o importada), entonces (C) no es otra cosa que $\Gamma^M_\infty \vdash a = \overline{a^{\mathscr{I}}}$.

[54]Recordar que no hemos agregado nuevos predicados ni funciones cuando definimos $L(M)$ desde M. Sólo agregamos constantes.

[55]Ya hemos definido $f^{\mathscr{I}}$. Estamos "pensando en voz alta" para sugerir un buen $f^{\mathscr{I}}$.

[56]De hecho, no es especial para nosotros, ya que no permitimos funciones 0-arias. Pero algunos autores lo hacen.

Sea $t \equiv ft_1,\ldots,t_k$. Por definición 1.4.4, $t^{\mathscr{I}} = f^{\mathscr{I}}(t_1^{\mathscr{I}},\ldots,t_k^{\mathscr{I}})$. Tomnso $n_i = t_i^{\mathscr{I}}$ para $i = 1,\ldots,k$. Entonces $t^{\mathscr{I}} = f^{\mathscr{I}}(n_1,\ldots,n_k)$. Por (B) y $(B,1)$,

$$\Gamma_\infty^M \vdash f\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k = \overline{f^{\mathscr{I}}(n_1,\ldots,n_k)}$$

Por H.I., $\Gamma_\infty^M \vdash t_i = \overline{t_i^{\mathscr{I}}}$, en otras palabras $\Gamma_\infty^M \vdash t_i = \overline{n_i}$, con $i = 1,\ldots,k$. Por **Ax4**, obtenemos (ejercicio **??**)

$$\Gamma_\infty^M \vdash ft_1,\ldots,t_k = f\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k$$

Así que (ejercicio **??**)

$$\Gamma_\infty^M \vdash ft_1,\ldots,t_k = \overline{f^{\mathscr{I}}(t_1^{\mathscr{I}},\ldots,t_k^{\mathscr{I}})}$$

con lo que conluye la demostración de (D).

Lema Principal 1.4.1. *Para todo* enunciado $\mathscr{A}$ *sobre* $L(M)$*,* $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ *sii* $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{A}$.

Demostración. Por inducción sobre las fórmulas.

Base. Cuando $\mathscr{A} \equiv Pt_1\ldots t_k$: Sea $n_i t_i^{\mathscr{I}}$ $(i = 1,\ldots,k)$. Por la equivalencia (A), $P^{\mathscr{I}}(n_1,\ldots,n_k) = \mathbf{t}$ sii $\Gamma_\infty^M \vdash P\overline{n}_1\ldots\overline{n}_k$ sii $\Gamma_\infty^M \vdash Pt_1\ldots t_k$, esto último por **Ax4** (ejercicio **??**) y (D). Hemos terminado, ya que $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = P^{\mathscr{I}}(t_1^{\mathscr{I}}\ldots t_k^{\mathscr{I}})$.

Cuando $\mathscr{A} \equiv t = s$: Sea $n = t^{\mathscr{I}}$ y $m = s^{\mathscr{I}}$. entonces $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ sii $t^{\mathscr{I}} = s^{\mathscr{I}}$ sii $n = m$ sii $\Gamma^M \vdash \overline{n} = \overline{m}$ (el último "sii" se sigue de consistencia y 1.5.33f.r.; también por **Ax3** y corolario 1.3.4.).

Paso Inductivo. Sea $\mathscr{A} \equiv \neg\mathscr{B}$. Entonces $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ sii $\mathscr{B}^{\mathscr{I}} = \mathbf{f}$ sii (H.I.) $\Gamma_\infty^M \nvdash \mathscr{B}$ sii ($\Rightarrow$ completud y lema 1.4.8; $\Leftarrow$ consistencia y corolario 1.4.3) $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{A}$.
Sea $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{C}$. Consideremos promero $\mathscr{B}^{\mathscr{I}} \vee \mathscr{C}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. Digamos $\mathscr{B}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. Por H.I., $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B}$; así $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B} \vee \mathscr{C}$ por implicación taultológica. De manera similar si $\mathscr{C}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. Reciprocamente, sea $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B}\mathscr{C}$. Entoces es el caso que $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B}$ o $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{C}$, pues si ninguno es el caso Γ_∞^M resulta inconsistente (¿Porqué?).

Por último: Sea $\mathscr{A} \equiv (\exists x)\mathscr{B}$. Sea $((\exists x)\mathscr{B})^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. Entonces $(\mathscr{B}[x \leftarrow \overline{n}])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$ para alguna $n \in M$. Por H.I., $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B}[x \leftarrow \overline{n}]$; entonces $\Gamma_\infty^M \vdash (\exists x)\mathscr{B}$ por **Ax2** y MP. Me forma recíproca, $\Gamma_\infty^M \vdash (\exists x)\mathscr{B}$. Por lema 1.4.9, $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{B}[x \leftarrow \overline{n}]$, donde $\overline{n}$ es la constante de Henkin apropiada. Por H.I., $(\mathscr{B}[x \leftarrow \overline{n}])^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$, por lo que $\mathscr{A}^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. □

Finalmente;

Demostración. (**Del Teorema de Consistencia**) Sea $\mathscr{A}'$ una $\mathfrak{M}$-instancia de una fórmula $\mathscr{A}$ en Γ. Note que $\mathscr{A}$ está sobre L. De $\Gamma \subseteq \Gamma_\infty^M$ se sigue que $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{A}$, y entonces $\Gamma_\infty^M \vdash \mathscr{A}'$ (por corolario 1.3.4.). Por el Lema Principal, $\mathscr{A}' = \mathbf{t}$. De esta manera, el reducto $\mathfrak{M}' = (M, \mathscr{I} \restriction L$ es un modelo de Γ. □

◇ Se tiene que tomar $\mathfrak{M}'$ por razones técnicas. Si bien es cierto que $\mathfrak{M}$ "satisface" Γ, su interpretación $\mathscr{I}$ actúa también sobre símbolos que no están en L. La interpretaciín de una *estructura apropiada para* L debe asignar significado unicamente a los símbolos de L. ◇

Corolario 1.4.4. *Una teoría consistente sobre un lenguaje contable tiene un modelo contable.*

Corolario 1.4.5. Teorema de Löwenheim Skolem. *Si un conjunto de fórmulas Γ sobre un lenguaje contable tiene un modelo, entonces tiene un modelo contable.*

Demostración. Si esxiste un modelo, entonces la teoría Γ es consistente. □

Corolario 1.4.6. Teorema de Completud de Gödel. *En cualquier lenguaje de primer orden contable L, se tiene que $\Gamma \models \mathscr{A}$ implica $\Gamma \vdash \mathscr{A}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ la *cerradura universal* de $\mathscr{A}$. Por ejercicio **??**, $\Gamma \models \mathscr{B}$. Así $\Gamma + \neg\mathscr{B}$ no tiene modelos (¿Porqué?). En consecuencia, es inconsistente. Por tanto, $\Gamma \vdash \mathscr{B}$ (por corolario 1.3.7), de donde (por especialización) $\Gamma \vdash \mathscr{A}$. □

◊ Otra manera de enunciar el resultado anterior es: Si $\Gamma \models \mathscr{A}$, entonces $\Delta \models \mathscr{A}$, donde $\Delta \subseteq \Gamma$ finito. Esto es consecuencia de correctud, pues $\Gamma \models \mathscr{A}$ implica $\Gamma \vdash \mathscr{A}$, y así $\Delta \vdash \mathscr{A}$, donde Δ consiste de aquellas fórmulas de Γ utilizadas en la prueba de $\mathscr{A}$. ◊

Corolario 1.4.7. Teorema de Compacidad. *En todo lenguaje de primer orden contable L, un conjunto de fórmulas Γ es satisfacible sii es finitamente satisfacible.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Trivial, un modelo de Γ es modelo de cualquier subconjunto finito de él.

($\Leftarrow$) Supongamos que Γ es no satisfacible (no tiene modelos). Entonces es inconsistente, por teorema de consistencia. En particular, $\Gamma \neg x = x$. Ya que la teoría pura sobre L es consistente, una Γ-prueba de $\neg x = x$ involucra una secuencia finita de axiomas no lógicos (fórmulas de Γ) $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, es decir, $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \neg x = x$; por lo tanto $\{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n\}$ no tiene modelo (por correctud). Esto contradice la hipótesis. □

◊ Alternativamente, podemos demostrar lo anterior por "compacidad sintáctica": Un conjunto de fórmulas es consistente sii todo subconjunto finito es consistente, ya que las pruebas tienen longitud finita, después el teorema de la consistencia y el corolario 1.4.2. ◊

◊◊ Concluimos la sección delineando las modificaciones a nuestra demostración para remover la restricción sobre el "tamaño" de L (que sea contable). Este plan de modificaciones presupone algún conocimiento[57] de ordinales y cardinalidad (cf. volumen 2) mayor al que nuestro "curso express" ha cubierto. El lector puede aceptar los siguientes resultados y omitir las demostraciones sin pérdida

[57] En un nivel informal, por supuesto. Todo esto yace en la metateoría, como en el caso contable.

de continuidad. Estos resultados, el Teorema de Compacidad de Gödel-Malcev en particular, son usados después para fundamentar el análisis no estándar (al estilo de A. Robinson).

Sea L (posiblemente) no contable, en el sentido de que la *cardinalidad* $\mathfrak{k}$ de $\mathcal{V}$ es $\geq \omega$. El conjunto de todas las expresiones sobre $\mathcal{V}$ también es $\mathfrak{k}$ (para una demostración de esto, ver capítulo 7 del volumen 2). Ahora centraremos nuestra discusión en un conjunto arbitrario N de cardinalidad $\mathfrak{k}$.

Observación 1.4.3. $\diamondsuit$ Un ejemplo de tal conjunto es $\mathfrak{k}$ mismo, y puede ser escogido como N. Sin embargo, podemos gozar de mayor generalidad; N puede ser *cualquier* conjunto de cualquier tipo de objetos (reales) que escojamos con algún propósito en mente, siempre que su cardinalidad sea $\mathfrak{k}$. $\diamondsuit$

Por consiguiente, los elementos de N pueden ser arreglados en una *sucesión transfinita* (indizada por todos los ordinales $\alpha < \mathfrak{k}$)

$$n_0, n_1, \ldots, n_\alpha, \ldots$$

Cosntruimos entonces $L(N)$ (paralelamente a $L(\mathbb{N})$ de nuestra construcción previa) agregando a $\mathcal{V}$ un nombre distinto $\overline{n_\alpha}$ por cada $n_\alpha \in N$. Así, tenemos numeraciones

$$F_0, F_1, F_2, , \ldots, F_\alpha, \ldots \text{ de todas las expresiones en } \mathbf{Fbf}(N) \qquad (1')$$

y

$$G_1, G_2, G_3, , \ldots, G_\alpha, \ldots \text{ de las expresiones en } \mathbf{Fbf}(N) \text{ de la forma } (\exists x)\mathscr{A} \qquad (2')$$

donde, en $(2')$, toda expresión $(\exists x)\mathscr{A}$ de $\mathbf{Fbf}(N)$ es listada una catidad infinita de veces, y los índice en $(1')$ y $(2')$ *varían sobre todos los ordinales* $\alpha < \mathfrak{k}$ (omitiendo 0 en la segunda lista).

Procedemos como ya se espera: Definimos por recursión sobre los ordinales $\alpha < \mathfrak{k}$ una sucesión transfinita de teoría (determinadas por Γ y expresiones adicionales sobre $L(N)$ como axiomas no lógicos[58]):

Fijamos $\Gamma_0 = \Gamma$. Para $\alpha < \mathfrak{k}$, definimos Γ_α como $\bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta$ en caso que α sea un *ordinal límite*. Si $\alpha = \beta + 1$ (un *sucesor*), la definición es realizada en dos etapas: Primeto tomamos

$$\Delta_\beta = \begin{cases} \Gamma_\beta \cup \{\mathscr{F}_\beta\} & \text{si } \Gamma_\beta \nvdash \mathscr{F}_\beta \\ \Gamma_\beta & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (3')$$

Entonces, hacemos $\Gamma_\alpha = \Delta_\beta \cup \{\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}]\}$, sólo en caso que $\Delta_\beta \vdash \mathscr{G}_\alpha$, donde $\mathscr{G}_\alpha \equiv (\exists x)\mathscr{A}$.

[58]Las fórmulas en Γ no necesariamente son cerradas.

$\diamondsuit$ La elección de i es importante: $i = n_\alpha \in N$, donde $\alpha < \mathfrak{k}$ es el índice *más pequeño* tal que la constante $\overline{n_\alpha}$ *no ocurre* (como subexpresión) en ningua de las siguientes

$$\mathscr{F}_0, \ldots, \mathscr{F}_\beta, \mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_\alpha \tag{4'}$$

$\mathscr{A}[x \leftarrow \overline{i}]$ agregada a Γ_α es llamado un *axioma especial de Henkin*. La constante $\overline{i}$ es la constante asociada de Henkin o constante testigo. $\diamondsuit$

Ahora tomamos

$$\Gamma_{\mathfrak{k}} = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{k}} \Gamma_\alpha \tag{5'}$$

Este es un conjunto de fórmulas sobre **Fbf**(N) que define una teoría $\mathfrak{T}_{\mathfrak{k}}$ sobre **Fbf**(N) (como conjunto de axiomas no lógicos de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{k}}$). después definimos $\sim$, esta vez sobre N, como antes ((6) p.66ref):

$$n \sim m \qquad \text{sii} \qquad \vdash_{\mathfrak{T}_{\mathfrak{k}}} \overline{n} = \overline{m}$$

Señalamos sus propiedades, y procedemos a definir un subconjunto M de N como en (7) y (8) (p.67ref).

Como $M \subseteq N$, su cardinalidad es $\leq \mathfrak{k}$. Después de definir la M-restricción de una fórmula $\mathscr{A}$ como antes, y seguimos como en los lemas 1.5.281.4.6-1.4.101.5.33ref, haciendo el reemplazo respectivo de $\mathfrak{T}_\infty$ por $\mathfrak{T}_{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{T}_\infty^M$ por $\mathfrak{T}_{\mathfrak{k}}^M$ y elementos $i \in \mathbb{N}$ por elementos $i \in N$. Al terminar todo, estamos listos para enunciar:

Metateorema 1.4.3. Teorema de Consistencia. *Si una teoría (de primer orden) $\mathfrak{T}$ sobre un lenguaje L de cardinalidad $\mathfrak{k}$ es consistente, entonces tiene un modelos de cardinalidad $\leq \mathfrak{k}$.*

$\diamondsuit$ Terminología: la cardinalidad de un modelo es la cardinalidad de su dominio. $\diamondsuit$

Corolario 1.4.8. Teorema de Completud. *En cualquier lenguaje de primer orden L, $\Gamma \models \mathscr{A}$ implica $\Gamma \vdash \mathscr{A}$.*

Corolario 1.4.9. Teorema de Compacidad de Gödel-Malcev. *En todo lenguaje de primer orden L, un conjunto de fórmulas Γ es satisfacible sii es finitamente satisfacible.*

El teorema de Löwenheim-Skolem toma la forma:

Corolario 1.4.10. Teorema de Löwenheim- Skolem "Hacia Ariiba". *Si un conjunto de fórmulas Γ sobre un lenguaje L de cardinalida $\mathfrak{k}$ tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelos de cualquier cardinalidad $\mathfrak{n}$ tal que $\mathfrak{k} \leq \mathfrak{n}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{K} = (K, \mathscr{I})$ un modelo infinito de Γ. Tomamos un conjunto N de cardinalidad $\mathfrak{n}$, e importamos todos sus elementos c como nuevas constante $\overline{c}$ dentro del lenguaje de Γ. El conjunto $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{\neg\overline{c} = \overline{d} : c, d \in N \text{ distintos.}\}$ es finitamente satisfacible. Esto porque todo subconjunto finito de $\overline{\Gamma}$ involucra sólo una cantidad finia de fórmulas $\neg\overline{c} = \overline{d}$; así, K tiene capacidad (porque es infinito) de extender $\mathscr{I}$ a $\mathscr{I}'$ (sin alterar K, definiendo de distntos $\overline{c}^{\mathscr{I}'}, \overline{d}^{\mathscr{I}'}$, etc.) para satisfacer estas fórmulas en una estructura expandida $\mathfrak{K}' = (K, \mathscr{I}')$.

Por lo tanto $\overline{\Gamma}$ es consistente.

Continuando con la construcción dada anteriormente, tomamos N (y Γ) como punto inicial para construir una extensión $\mathfrak{T}_{\mathfrak{n}}$ simplemente completa y consistente de $\overline{\Gamma}$, y un modelo $\mathfrak{M}$ *para* $\overline{\Gamma}$ (ver pp.66-73ref). En las circunstancias actuales, "$\sim$" es "$=$" en N, pues $\vdash_{\mathfrak{T}_{\mathfrak{n}}} \overline{c} = \overline{d}$ implica $c = d$ en N (en otro caso $\neg\overline{c} = \overline{d}$ es un axiomas – imposible, ya que $\mathfrak{T}_{\mathfrak{n}}$ es consistente). Entonces $M = N$; por lo que la cardinalida de M es $\mathfrak{n}$.

El modelo que nos sirve es el reducto de $\mathfrak{M}$ en L. Claramente su cardinalidad es la correcta (M no cambia). □

Tan buena como parezca, la prueba anterior se bada en la demostración del teorema de consistencia y no es más que una copia. Por lo que ofrecemos una demostración sin este defecto.

Demostración. (Una vez mas) Desarrollamos un argumento distinto a partir de la consistencia de $\overline{\Gamma}$. Como el lenguaje de esta teoría tiene cardinalidad $\leq \mathfrak{n}$,
Pausa. ¿Porqué?
sabemos (por metateorema 1.4.3) que

$$\text{tenemos un modelo } \mathfrak{M} = (M, \mathscr{I}) \text{ para } \overline{\Gamma} \text{ de cardinalidad } \leq \mathfrak{n} \qquad (**)$$

Ahora definimos una función $f : N \to M$ como $f(n) = \overline{n}^{\mathscr{I}}$. Como hemos importado toda $n \in N$ dentro del lenguaje $\overline{\Gamma}$, f es total. f también es inyectiva: En efecto, si $c \neq d$ en N, entonces $\neg\overline{c} = \overline{d}$ es un axioma. De esta manera $(\neg\overline{c} = \overline{d})^{\mathscr{I}} = \mathbf{t}$. Esto es, $f(c) \neq f(d)$ en M. Pero luego (por resultados sobre cardinalidad en volumen 2) la cardinalidad $\mathfrak{n}$ de N es $\leq$ la cardinalidad de M. Por otro resultado acerca de cardinalidad,[59] (**) y lo anterior, conluimos que N y M tienen la misma cardinalidad.

En este punto volvemos a la prueba anterior, tomando el reducto $\mathfrak{M}$ de L. □

La prueba anterior no requiere del teorema de consistencia. ◇◇

Observación 1.4.4. ◇ Sobre "verdad". El Teorema de Completud muestra que el aparato sintático de una lógica (formal) de primer orden captura totalmente

[59] $\mathfrak{k} \leq \mathfrak{l} \wedge \mathfrak{l} \leq \mathfrak{k} \to \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$

la noción semántica de verdad, *modulo* la aprobación de cualesquiera suposiciones Γ dadas. Esto justifica el hábito de los matemáticos (incluso los formalistas: ver [Bourbaki(B), 1966], p.21) de decir – en el contexto de alguna teoría Γ dada– "es verdadero" (como simónimo de "es un Γ-teorema" o " es Γ-probado"), "es falso" (como sinónimo de "la negación es un Γ-teorema"), "supongamos que $\mathscr{A}$ es verdadero" (como sinónimo de "agreguemos la fórmula $\mathscr{A}$ –a Γ– como axioma no lógico") y "supongamos que $\mathscr{A}$ es falso" (como sinónimo de "agreguemos la fórmula $\neg\mathscr{A}$ –a Γ– como axioma no lógico").

Así, "es verdadero" (en el contexto de una teoría) significa "es verdadero *en todos sus modelos*", por consiguiente demostrable, un teorema. No haremos uso de este *argot*, *jerga*.

Hay otro uso de "es verdadero" (a menudo se dice enfáticamente "es realmente verdadero"), para decir verdadero en una estructuraa específica, el "modelo implícito". Debido a; Primer Teorema de Incompletud de Gödel (sección **??**), esta noción *no* coincide con la de demostrabilidad. $\diamondsuit$

Índice alfabético

M-restricción, 46
Γ-prueba, 19
Γ-teorema, 18
$\exists$-cuantificación, 18
$\forall$-cuantificación, 24
$\mathfrak{M}$-fórmulas, 35
$\mathfrak{M}$-instancia, 36
$\mathfrak{M}$-términos, 35

absolutamente demostrable, 18
asignación de verdad, 11
axioma especial de Henkin, 44
axiomas lógicos, 15

cerradura universal, 25
completud semántica, 42
conjunto definible en $\mathfrak{M}$ sobre $\mathscr{L}$, 40
consistencia, 22
consistencia relativa, 22
correctud, 36, 39
cuantificación existencial, 18
cuantificación universal, 24

definibilidad en una estructura, 40
demostracíon por contradicción, 31
demostración por casos, 32
demostración por constante auxiliar, 32
demostraciones al estilo de Hilbert, 24
distibutividad del $\exists$, 31
distributividad del $\forall$, 31

Entscheidungsproblem, 22
especialización, 24
expansión, 35
extensión conservativa, 27
extensión de un lenguaje, 34
extensión de una teoría, 27

fórmula satisfacible, 12
fórmulas (demostrablemente) equivalentes, 24
fórmulas primas, 10
fórmulas proposicionales, 10
función definible, 41

generalización, 25

implicación lógica, 36
implicación tautológica, 13

metateorema acerca de constantes, 28
metateorema variante, 26
modus ponens, 18
monotonía del $\exists$, 31
monotonía del $\forall$, 31

problema de la desición, 22
propiedad testimonial, 45

reducto, 35
regla de Leibniz, 32
reglas de inferencia, 18
reglas de inferencia secundarias, 19
relación definible, 40
renombrado bobo, 26
restricción de un lenguaje, 35

sustitución de términos, 13, 25
sustitución simultánea, 15

tablas de verdad, 12
tautología, 12
teoría absoluta, 21
teoría aplicada, 21
teoría consistente, 20
teoría contradictoria, 20
teoría de Henkin, 45
teoría formal, 19
teoría inconsistente, 20
teoría pura, 21
teorías axiomáticas, 20
teorías axiomatizadas, 20
teorema de la deducción, 29
teorema de la equivalencia, 32
Teorema de Post, 23

validez de una fórmula en una estructura, 36
validez universal, 36
valor de verdad, 11
valuación proposicional, 11
variable proposicional, 10

Bibliografía

[Wil, 1963] (1963).
Introduction to the Foundations of Mathematics.
Wiley, New York.

[Bourbaki(B), 1966] Bourbaki(B), N. (1966).
Éléments de mathématique; théorie des ensembles.
Hermann, Paris.

[Dijkstra and Scholten, 1990] Dijkstra, E. W. and Scholten, C. S. (1990).
Predicate Calculus and Program Semantics.
Springer-Verlag, New York.

[Enderton, 1972] Enderton, H. B. (1972).
A mathematical Introduction to Logic.
Academic Press, New York.

[Gries and Schneider, 1994] Gries, D. and Schneider, F. B. (1994).
A Logical Approach to Discrete Math.
Springer-Verlag, New York.

[Henkin, 1952] Henkin, L. (1952).
A problem concerning provability.
Symbolic Logic.

[Hilbert and Bernays, 1968] Hilbert, D. and Bernays, P. (1968).
Grundlagen der Mathematik I, II.
Springer-Verlag, New York.

[Manin, 1977] Manin, Y. I. (1977).
A Course in Mathematical Logic.
Springer-Verlag, New York.

[Mendelson, 1987] Mendelson, E. (1987).
Introduction to Mathematical Logic.
Wadswoorth & Brooks, Monterey, California, 3a edition.

[Rasiowa and Sikorski, 1963] Rasiowa, H. and Sikorski, R. (1963).
The Mathematics of Metamathematics.

Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

[Schoenfield, 1967] Schoenfield, J. R. (1967).
Mathematical Logic.
Addison- Wesley, Reading, Mass.

[Schütte, 1977] Schütte, K. (1977).
Proof Theory.
Springer-Verlag, New York.

[Smullyan, 1992] Smullyan, R. M. (1992).
Gödel's Incompleteness Theorems.
Oxford University Press, Oxford.

[Veblen and Young, 1916] Veblen, O. and Young, J. W. (1916).
Proyective Geometry.
Ginn, Boston.