TAREA

1. Justifique la prueba de la siguiente,

Proposición$_3$.

i) $\forall\kappa\left[\kappa \geq \omega \rightarrow \kappa^{cof(\kappa)} > \kappa\right].$

ii) $\forall\kappa\forall\lambda\left[\kappa \geq \omega \ \& \ \lambda \geq cof(\kappa) \rightarrow \kappa^{\lambda} > \kappa\right].$

Prueba: Probemos **ii**) y de ella se sigue **i**).

Sea pues $\kappa \geq \omega$ y $\lambda \geq cof(\kappa);$ veamos que $\kappa^{\lambda} > \kappa.$ Puesto que $\kappa \leq \kappa^{\lambda},$ basta ver que no hay funciones suprayectivas de κ en ${}^{\lambda}\kappa.$ Sean $g : \kappa \rightarrow {}^{\lambda}\kappa$ y f testigo de la cofinalidad de λ en κ. Se define

$$h : \lambda \rightarrow \kappa$$

$$\forall\xi < \lambda, \quad h(\xi) = \bigcap\left[\kappa \setminus \left\{\Big(g(\nu)\Big)(\xi) \ / \ \nu < f(\xi)\right\}\right]$$

Así, h no está en la imagen de g y de aqui que g no sea suprayectiva. †

2. Recordar que,

$$[\kappa]^{\lambda} = \left\{a \subseteq \kappa \ / \ \left| a \right| = \lambda\right\}$$

prueba que $\left| [\kappa]^{\lambda} \right| = \kappa^{\lambda}.$

3. Todo cardinal fuerte es un *beth*.

4. Pruebe la siguiente,

Proposición$_{14}$. Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Así:

1. Si $\left| a \right| < \kappa,$ entonces $\left| \wp(a) \right| < \kappa.$

2. Si para toda $i \in I,$ $\left| a_i \right| < \kappa,$ con $\left| I \right| < \kappa,$ entonces $\left| \bigcup\limits_{i \in I} a_i \right| < \kappa.$

3. Si $\left| a \right| < \kappa$ y $f : a \rightarrow \kappa,$ entonces $\left| \bigcup f[a] \right| < \kappa.$