Extensiones Conservadoras

En lo que sigue, sean ρ y ρ' dos tipos de semejanza.

Recordar: Sean $\rho \subseteq \rho'$ y $T \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$.

- Sea $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$. $T \vDash_\rho \sigma$ syss $\dot{\forall}\ \mathfrak{A} \in V_\rho \Big[\mathfrak{A} \vDash T \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \sigma \Big]$
- $T^{\vDash_\rho} = \Big\{ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \ /\ T \vDash_\rho \sigma \Big\}$
- T es una ρ–teoría syss $T = T^{\vDash_\rho}$.
- $ATM_\rho \subseteq ATM_{\rho'}$, $TRM_\rho \subseteq TRM_{\rho'}$, $FRM_\rho \subseteq FRM_{\rho'}$ y $\mathcal{L}^0_\rho \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$.
- Sean $\mathfrak{B} \in V_{\rho'}$ y $\mathfrak{A}$ la restricción de $\mathfrak{B}$ a ρ, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \upharpoonright \rho$. Así,

I. Para todo $\tau \in TRM_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$,

$$\tau^{\mathfrak{A}}[s] = \tau^{\mathfrak{B}}[s]$$

II. Para toda $\alpha \in FRM_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$,

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha[s] \text{ syss } \mathfrak{B} \vDash \alpha[s]$$

III. Para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$,

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma \text{ syss } \mathfrak{B} \vDash \sigma$$

Si T es una teoría en un lenguaje, digamos $\mathcal{L}_\rho$, y extendemos nuestro lenguaje, digamos: $\rho' \supseteq \rho$, la ρ–teoría T es, evidentemente, un conjunto de ρ'–enunciados pero ya no está cerrada bajo consecuencias lógicas en el nuevo lenguaje, $\mathcal{L}_{\rho'}$. Dicho de otra manera, deja de ser teoría. Ejemplos de ρ'–enunciados que no pertenecen a T son todos los "nuevos" universalmente válidos y hay muchos más. Sin embargo, hay una ρ'–teoría asociada a T en forma natural:

Definición₁. Sean T una ρ–teoría y $\rho' \supseteq \rho$. La *Expansión* de T *a* ρ, en breve ρ'–*Expansión,* es la ρ'–teoría:

$$T' = \Big\{ \sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho'} \ /\ T \vDash_{\rho'} \sigma \Big\}$$

Observaciones₁: Sea T' la ρ'–expansión de T, así:

1. T' es la cerradura de T, bajo $\vDash_{\rho'}$, en símbolos: $T' = T^{\vDash_{\rho'}}$. Así, T' es una ρ'–teoría.

2. Para un $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho'}$, se tiene que: $\sigma \in T'$ syss $\dot{\forall}\ \mathfrak{B} \in V_{\rho'} \Big[\mathfrak{B} \vDash T \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \sigma \Big]$.

3. $\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \Big[T \models_\rho \sigma \ \Rightarrow\ T' \models_{\rho'} \sigma \Big]$.

4. Si $\rho' \supsetneq \rho$, entonces $T' \supsetneq T$.

En general, cuando extendemos el lenguaje de una teoría es para modificarla de alguna manera, por ejemplo aumentando axiomas que "hablen" de los nuevos elementos que introdujimos. Pasemos a formalizar esta manera de extender teorías.

Definición$_2$. Sean T una ρ–teoría y T' una ρ'–teoría. Diremos que T' es una *Extensión (Simple) de T a ρ'*, en corto *ρ'–Extensión* syss $\rho' \supseteq \rho$ y $T' \supseteq T$.

Observaciones$_2$:

1. Por $T' \supseteq T$, estamos entendiendo que: $T \subseteq T' \cap \mathcal{L}^0_\rho$,
o equivalentemente:

$$\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \Big[T \models_\rho \sigma \ \Rightarrow\ T' \models_{\rho'} \sigma \Big]$$

2. La expansión de una teoría es una extensión de ésta.

Como vemos, la expansión de una teoría no aporta nada nuevo escrito en el lenguaje antiguo. Dicho de otra manera, apesar de haber enriquesido el lenguaje no hay aportación de nueva información que perteneciera al lenguaje original. Este tipo de extensiones son las que nos interesarán en estos momentos.

Definición$_3$. Sean T una ρ–teoría y T' una ρ'–teoría. Diremos que T' es una *Extensión Conservadora (o Conservativa)* de T syss

i). T' es una extensión de T y

ii). $\neg\ \dot{\exists}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \Big[T' \models_{\rho'} \sigma \ \&\ T \not\models_\rho \sigma \Big]$ o $\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \Big[T' \models_{\rho'} \sigma \ \Rightarrow\ T \models_\rho \sigma \Big]$.

Observación$_3$: Son equivalentes:

1. T' es una extensión conservadora de T.

2. $\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \Big[T' \models_{\rho'} \sigma \ \Leftrightarrow\ T \models_\rho \sigma \Big]$.

3. $T' \cap \mathcal{L}^0_\rho = T$.

Proposición. La expansión de una teoría es una extensión conservadora.
Prueba: Sean T una ρ–teoría, $\rho' \supseteq \rho$ y T' la ρ'–expansión de T. Sabemos que T' es una extensión de T, veamos que cumple **ii**).

Sea pues, $\theta \in \mathcal{L}^0_\rho$ tal que, $T' \models_{\rho'} \theta$. Queremos demostrar que $T \models_\rho \theta$. Consideremos una $\mathfrak{A} \in V_\rho$, que cumple con $\mathfrak{A} \models T$; veamos que $\mathfrak{A} \models \theta$.

Ahora, consideremos cualquier ρ'–expansión de $\mathfrak{A}$, digamos $\mathfrak{A}'$. Así, puesto que $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \upharpoonright \rho$ y $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$, tenemos que $\mathfrak{A}' \models T$.

De esto y de la **Observación**$_{1.2}$, puesto que T' la ρ'–expansión de T, obtenemos que $\mathfrak{A}' \models T'$. Ahora, como partimos de que $T' \models_{\rho'} \theta$, inferimos que $\mathfrak{A}' \models \theta$.

Finalmente, ya que $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \upharpoonright \rho$ y $\theta \in \mathcal{L}_\rho^0$, obtenemos que $\mathfrak{A} \models \theta$. †

Cuando estamos trabajando en una teoría, regularmente nos encontramos con que podemos probar la existencia de un objeto particular –p.e. el neutro para una operación–, o de una operación –p.e. la exponenciación en términos del producto y la suma– o simplemente queremos introducir una nueva relación entre los elementos del discurso –p.e. un orden. De principio nuestro lenguaje, y por tanto las reglas gramaticales, nos prohiben "hablar" formalmente de estos nuevos objetos. Si quisieramos "hablar" de ellos, con todo el rigor exigido, tendríamos que extender nuestro lenguaje con nuevos símbolos, pero habría que extender nuestra teoría con las "definiciones" correspondientes y éstas tienen que ser de tal manera que la nueva teoría sea conservadora. Los siguientes resultados nos dan las condiciones para todo ello.

(I) Extensiones por definición de Constantes.

Sean T una ρ–teoría y $\alpha \in FRM_\rho$ cuya única variable líbre es y. Supongamos que se tiene:

$$T \models_\rho \exists! y\, \alpha$$

Y sea c una constante individual nueva ($c \notin \rho$). Sean $\rho' = \rho \cup \{c\}$ y T' la ρ'–teoría que se obtiene al cerrar bajo consecuencias lógicas (en $\mathcal{L}_{\rho'}$), el conjunto:

$$T \cup \left\{\forall y \Big(y \approx c \leftrightarrow \alpha \Big)\right\}$$

Así,

1. T' es una extensión conservadora de $T.$ Y además,

2. Para toda ρ'–fórmula β hay una ρ–fórmula β^*, con las mismas variables líbres de $\beta,$ tal que:

i). $T' \models_{\rho'} \beta^* \leftrightarrow \beta.$
ii). $T' \models_{\rho'} \beta$ syss $T \models_\rho \beta^*.$

Prueba:

1] Puesto que T' es una ρ'–extensión de $T,$ es suficiente con probar que, si $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$ tal que $T' \models_{\rho'} \sigma,$ se tiene que $T \models_\rho \sigma.$ Sea pues, $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que $\mathfrak{A} \models T.$

De las hipótesis, tenemos que: $\mathfrak{A} \models \exists! y\, \alpha.$ Y por tanto, hay un único $a_0 \in A,$ tal que $\mathfrak{A} \models \alpha\,[a_0].$ Ahora bien, sea $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, c^{\mathfrak{A}'} \rangle$ donde $c^{\mathfrak{A}'} = a_0;$ con esto tenemos que $\mathfrak{A}' \in V_{\rho'}.$

No es difícil verificar que $\mathfrak{A}' \models T'$ y, que por nuestra suposición, $\mathfrak{A}' \models \sigma.$ Pero σ es un ρ–enunciado y $\mathfrak{A}$ es el reducto de $\mathfrak{A}'$ a $\rho,$ por tanto $\mathfrak{A} \models \sigma.$

2] Para cada ρ'–término τ y cada variable $x,$ que no ocurra en $\tau,$ hay una

ρ–fórmula $\varphi_{\tau,x}$ cuyas variables líbres son: x y las que ocurren en τ; y con la propiedad:

$$T' \models_{\rho'} \varphi_{\tau,x} \leftrightarrow (\tau \approx x) \qquad (*)$$

Definimos a $\varphi_{\tau,x}$, recursivamente sobre la formación de ρ'–términos, como sigue:

I. Sea $i \in \mathbb{N}$ y $d \in \mathcal{C}_\rho$. Así,

a). Si $\tau \doteq v_i$, sea $\varphi_{\tau,x} \doteq (v_i \approx x)$

b). Si $\tau \doteq d$, sea $\varphi_{\tau,x} \doteq (d \approx x)$

c). Si $\tau \doteq c$, sea $\varphi_{\tau,x} \doteq \alpha'(y/x)$

Donde $\alpha'(y/x)$ se obtuvo de α, al cambiar todas las ocurrencias (sólamente habrá acotadas) de x, por una variable distinta de x y posteriormente cambiar todas las ocurrencias libres de la variable y (las hay libres) por la variable x.

II. Sean $\tau_1,\ldots,\tau_n \in TRM_{\rho'}$ y $f \in \mathcal{F}^n_{\rho'}$ $(= \mathcal{F}^n_\rho)$. Así, si $\tau \doteq f(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, sea

$$\varphi_{\tau,x} \doteq \exists y_1 \ldots \exists y_n \Big(\varphi_{\tau_1,y_1} \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi_{\tau_n,y_n} \ \& \ (f(y_1,\ldots,y_n) \approx x)\Big)$$

donde las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son distintas entre sí, distintas de la variable x y distintas de cualquier otra variable que ocurra en el ρ'–término τ.

La propiedad $(*)$ se sigue (por inducción) de nuestra definición.

Ahora, para cada ρ'–fórmula β, definimos la ρ'–fórmula β^*, por recursión sobre la formación de ρ'–fórmulas:

I. Sean $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n \in TRM_{\rho'}$ y $Q \in \mathcal{P}^n_{\rho'}$ $(= \mathcal{P}^n_\rho)$. Así,

a). Si $\beta \doteq (\tau_1 \approx \tau_2)$, sea $\beta^* \doteq \exists y_1 \exists y_2 (\varphi_{\tau_1,y_1} \ \& \ \varphi_{\tau_2,y_2} \ \& \ (y_1 \approx y_2))$

b). Si $\beta \doteq Q(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, sea $\beta^* \doteq \exists y_1 \ldots \exists y_n \,[\varphi_{\tau_1,y_1} \ \&\ldots\& \ \varphi_{\tau_n,y_n} \ \& \ Q(y_1,\ldots,y_n)]$

Donde las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son distintas entre sí y distintas de cualquier otra variable que ocurra en alguno de los ρ'–términos $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$.

II. Sean $\gamma,\delta \in FRM_{\rho'}$ y $x \in VAR$. Así,

a). Si $\beta \doteq (\neg\gamma)$, sea $\beta^* \doteq (\neg\gamma^*)$

b). Si $\beta \doteq (\gamma \ \& \ \delta)$, sea $\beta^* \doteq (\gamma^* \ \& \ \delta^*)$

c). Si $\beta \doteq \big(\exists x \, \gamma\big)$, sea $\beta^* \doteq \big(\exists x \, \gamma^*\big)$

Una prueba directa (por inducción), usando la propiedad $(*)$, obtenemos **i**).

Finalmente, **ii**) se sigue de **i**). †

(II) Extensiones por definiciones Funcionales.

Sean T una ρ-teoría y $\alpha \in FRM_{\rho}$ cuyas variables líbres son: $x_1,\ldots,x_n,y$ (todas distintas). Supongamos que se tiene:

$$T \vDash_{\rho} \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \exists! y \, \alpha$$

Y sea f un símbolo funcional nuevo ($f \notin \rho$) de aridad n. Sean $\rho' = \rho \cup \{f\}$ y T' la ρ'-teoría que se obtiene al cerrar bajo consecuencias lógicas (en $\mathcal{L}_{\rho'}$) el conjunto:

$$T \cup \left\{ \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y \Big(f(x_1,\ldots,x_n) \approx y \leftrightarrow \alpha \Big) \right\}$$

Así,

1. T' es una extensión conservadora de T. Y además,

2. Para toda ρ'-fórmula β hay una ρ-fórmula β^*, con las mismas variables líbres de β, tal que:

i). $T' \vDash_{\rho'} \beta^* \leftrightarrow \beta$.
ii). $T' \vDash_{\rho'} \beta$ syss $T \vDash_{\rho} \beta^*$.

Prueba: **TAREA**.

(III) Extensiones por definiciones Relacionales.

Sean T una ρ-teoría y $\alpha \in FRM_{\rho}$ cuyas variables líbres son $x_1,\ldots,x_n$ (todas distintas). Sea P un símbolo de predicado nuevo ($P \notin \rho$) de aridad n y sea $\rho' = \rho \cup \{P\}$. Sea T' la ρ'-teoría que se obtiene al cerrar bajo consecuencias lógicas (en $\mathcal{L}_{\rho'}$) el conjunto:

$$T \cup \left\{ \forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(P(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \alpha \Big) \right\}$$

Así,

1. T' es una extensión conservadora de T. Y además,

2. Para toda ρ'-fórmula β, hay una ρ-fórmula β^*, con las mismas variables líbres de β, tal que:

i). $T' \vDash_{\rho'} \beta^* \leftrightarrow \beta$.
ii). $T' \vDash_{\rho'} \beta$ syss $T \vDash_{\rho} \beta^*$.

Prueba: **TAREA**.

NOTA

Al axioma agregado, se le llama *Axioma Definitorio (de* P, *de* F *o de* c, respectivamente). Al cumplir la definición: la propiedad **1**, se dice que ésta es *No Creativa;* y al cumplir la propiedad **2.ii**, se dice que es *Eliminable.*