

## EXPONENCIACIÓN CARDINAL

Pasemos ahora a investigar la exponenciación cardinal, ayudándonos con la herramienta de cofinalidad. Aquí estaremos trabajando en **ZFC**<sup>-</sup>.

Sabemos muy poco de la exponenciación cardinal, recordemos. Sean  $\kappa, \lambda, \mu \in \text{Car}$ :

$$1. \kappa^\lambda \stackrel{\text{AE}}{=} \left| {}^\lambda \kappa \right| = \left| \{f / f: \lambda \rightarrow \kappa\} \right|.$$

$$2. \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}.$$

$$3. (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}.$$

$$4. \lambda < \mu \rightarrow \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu.$$

$$5. \lambda < \mu \rightarrow \lambda^\kappa \leq \mu^\kappa.$$

$$6. \kappa < 2^\kappa. \text{ Y por tanto, } \kappa^+ \leq 2^\kappa.$$

(Recordar: **HC**  $\Leftrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1$  y **HGC**  $\Leftrightarrow \forall \kappa \geq \omega, 2^\kappa = \kappa^+$ .)

$$7. \text{ Si } 2 \leq \kappa \leq \lambda \text{ y } \lambda \geq \omega, \text{ entonces } \kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda \left( \underset{\text{HGC}}{=} \lambda^+ \right).$$

$$8. \text{ Si } \lambda \geq \omega, \text{ entonces } (\lambda^+)^\lambda = 2^\lambda \left( \underset{\text{HGC}}{=} \lambda^+ \right).$$

Un resultado que es útil para el cálculo de la exponenciación nos lo dá la siguiente,

**Proposición**<sub>1</sub>. (Fórmula de Hausdorff)

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$$

**Prueba:** Sean  $\kappa, \lambda \geq \omega$ . Veamos que  $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$ .

Con respecto al orden entre la base y el exponente, tenemos dos casos:

$\kappa^+ \leq \lambda$  ] Por un lado, por 7., tenemos que  $(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda$ .

Y por el otro: Primeramente,  $\kappa^\lambda = 2^\lambda$  y en segundo lugar, puesto que

$$\kappa^+ \leq \lambda < 2^\lambda, \text{ tenemos } (\kappa)^\lambda \cdot (\kappa^+) = 2^\lambda.$$

$$\text{Así, } (\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+.$$

$\lambda < \kappa^+$  ] Este caso, lo probaremos por doble contención:

≤ ] Como  $\kappa^+$  es regular, tenemos que  $\text{cof}(\kappa^+) = \kappa^+ > \lambda$ . De esto tenemos

que, si  $f \in {}^\lambda(\kappa^+)$ , entonces  $f[\lambda]$  es acotado en  $\kappa^+$ , es decir hay un  $\alpha \in \kappa^+$  tal, que  $f: \lambda \rightarrow \alpha$  y de aquí que  ${}^\lambda(\kappa^+) = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} {}^\lambda \alpha$ . Por lo tanto, tenemos:

$$(\kappa^+)^\lambda = \left| {}^\lambda(\kappa^+) \right| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa^+} {}^\lambda \alpha \right| \leq \sum_{\alpha < \kappa^+} |\alpha|^\lambda \leq \sum_{\alpha \leq \alpha < \kappa^+} \kappa^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$$

≥ ] Ya que  $\kappa < \kappa^+$ , tenemos  $(\kappa)^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda$  y puesto que  $\kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda$ , obtenemos:

$$\kappa^\lambda \cdot \kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda$$

†

Veamos ahora un par de resultados que nos darán algo de información, están basados en el Teorema de König.

**Proposición<sub>2</sub>.**  $\lambda \geq \omega$  &  $\kappa \geq 2 \rightarrow \text{cof}(\kappa^\lambda) > \lambda$ .

**Prueba:** Sea  $\mu = \text{cof}(\kappa^\lambda)$ . Así,  $\kappa^\lambda$  se puede expresar como la suma de  $\mu$  cardinales, cada uno de cardinal menor a  $\kappa^\lambda$ ; es decir:

$$\kappa^\lambda = \sum_{\xi < \mu} \kappa_\xi$$

con  $\kappa_\xi < \kappa^\lambda$ , para toda  $\xi < \mu$ . Usando el Teorema de König tenemos,

$$\kappa^\lambda = \sum_{\xi < \mu} \kappa_\xi < \prod_{\xi < \mu} \kappa^\lambda = (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$$

Ahora bien, si tuvieramos que  $\mu \leq \lambda$ , tendríamos que

$$\kappa^\lambda < \kappa^{\lambda \cdot \mu} = \kappa^\lambda$$

lo cual es absurdo. Así,  $\text{cof}(\kappa^\lambda) = \mu > \lambda$ .

†

Como caso particular tenemos que,  $\text{cof}(2^{\aleph_0}) > \omega$  y por tanto,  $2^{\aleph_0}$  **no** puede ser  $\aleph_\omega$ , **ni**  $\aleph_{\omega+\omega}$ , **ni**,  $\aleph_{\varepsilon_0}$ , **ni** ningún cardinal cuya cofinalidad sea  $\omega$ . Se puede probar, usando técnicas de Forcing, el recíproco de esto, es decir, puede ser que

$$\text{cof}(\kappa) \neq \omega \rightarrow 2^{\aleph_0} = \kappa.$$

Una lectura de la propiedad **7**, es que si el exponente sobrepasa o es igual a la base entonces el resultado de la exponenciación es: 2 elevado al exponente. Y ¿que ocurre en el caso en que el exponente sea menor que la base?. Una respuesta parcial nos la dá la siguiente,

**Proposición<sub>3</sub>.**

i)  $\forall \kappa [\kappa \geq \omega \rightarrow \kappa^{\text{cof}(\kappa)} > \kappa]$ .

ii)  $\forall \kappa \forall \lambda [\kappa \geq \omega \ \& \ \lambda \geq \text{cof}(\kappa) \rightarrow \kappa^\lambda > \kappa]$ .

**Prueba de i):** Sean  $\kappa \geq \omega$  y  $\lambda = \text{cof}(\kappa)$ . Sabemos que,  $\kappa = \sum_{\xi < \lambda} \kappa_\xi$  con  $\kappa_\xi < \kappa$  para toda  $\xi < \lambda$ . Por el Teorema de König tenemos:

$$\kappa = \sum_{\xi < \lambda} \kappa_\xi < \prod_{\xi < \lambda} \kappa = \kappa^\lambda$$

La prueba de ii) es inmediata de i). †

Una prueba alternativa a este resultado se debe al mismo König, la cual **no** usa el teorema que lleva su nombre, de hecho prueba ii) y como caso particular se tiene i):

Sea pues  $\kappa \geq \omega$  y  $\lambda \geq \text{cof}(\kappa)$  veamos que  $\kappa^\lambda > \kappa$ . Puesto que  $\kappa \leq \kappa^\lambda$ , basta ver que no hay funciones suprayectivas de  $\kappa$  en  ${}^\lambda \kappa$ . Sean  $g : \kappa \rightarrow {}^\lambda \kappa$  y  $f$  testigo de la cofinalidad de  $\lambda$  en  $\kappa$ . Se define

$$h : \lambda \rightarrow \kappa$$

$$\forall \xi < \lambda, \quad h(\xi) = \bigcap \left[ \kappa \setminus \left\{ (g(v))(\xi) \mid v < f(\xi) \right\} \right]$$

Así,  $h$  no está en la imagen de  $g$  y de aquí que  $g$  no sea suprayectiva.

**Tarea.** Justique la prueba anterior.

Con este resultado podemos dar otra prueba de la **Proposición<sub>2</sub>**. Puesto que,

$$(\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^\lambda$$

tenemos, forzosamente, que,  $\lambda < \text{cof}(\kappa^\lambda)$ .

Hasta ahora sabemos que  $\kappa^\lambda$  es mayor estrictamente que  $\kappa$  cuando  $\lambda \geq \text{cof}(\kappa)$ ; y toma el valor de  $2^\lambda$ , cuando  $\lambda \geq \kappa$ . Se puede decir algo más cuando  $\text{cof}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$ , veamos:

$$\underset{3.i)}{\kappa} < \underset{\text{cof}(\kappa) \leq \lambda}{\kappa^{\text{cof}(\kappa)}} \leq \underset{\lambda \leq \kappa}{\kappa^\lambda} \leq \underset{7}{\kappa^\kappa} = 2^\kappa$$

Concretamos esto en:

**Proposición<sub>4</sub>**. Sean  $\kappa \geq \omega$  y  $\text{cof}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$ . Así,

1.  $\kappa < \kappa^\lambda \leq 2^\kappa$ .
2. (HGC)  $\kappa^\lambda = \kappa^+$ .

Vamos ahora a preguntarnos: ¿Qué ocurre para  $\kappa^\lambda$  cuando  $\lambda < \text{cof}(\kappa)$ ?

Sabemos que  $\kappa \leq \kappa^\lambda$ . Sea  $\mu = \text{cof}(\kappa)$  y supongamos que  $\lambda < \mu$ . De nuestra suposición obtenemos que,  ${}^\lambda \kappa = \bigcup_{\alpha \in \kappa} {}^\lambda \alpha$ . Con esto:

$$\kappa^\lambda = \left| \bigcup_{\alpha \in \kappa} {}^\lambda \alpha \right| \leq \sum_{\alpha < \kappa} |{}^\lambda \alpha| = \kappa \cdot \sup_{\alpha < \kappa} |\alpha|^\lambda$$

Ahora bien, ¿Qué podemos decir de  $|\alpha|^\lambda$ , para  $\alpha < \kappa$ ? Algo es:

$$|\alpha|^\lambda \leq (|\alpha| + \lambda)^{|\alpha| + \lambda} = 2^{|\alpha| + \lambda}$$

con  $|\alpha| + \lambda < \kappa$ . Pero de  $2^{|\alpha| + \lambda}$  ¿Qué se puede decir?.

Del  $\sup_{\alpha < \kappa} 2^{|\alpha| + \lambda}$  se puede ver que coincide con el punto de convergencia de la sucesión  $\langle 2^\mu / \lambda \leq \mu < \kappa \rangle$  y de esto, no se puede decir **nada**; salvo si suponemos **HGC**:

$$\kappa^\lambda \leq \kappa \cdot \sup_{\mu < \kappa} 2^\mu \stackrel{\text{HGC}}{=} \kappa \cdot \sup_{\substack{\mu < \kappa \\ \mu^+ \leq \kappa}} \mu^+ = \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

Resumiendo:

**Proposición<sub>5</sub>**. Sean  $\kappa \geq \omega$  y  $0 < \lambda < \text{cof}(\kappa)$ . Así,

1.  $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq \kappa \cdot \sup_{\mu < \kappa} 2^\mu$ .

2. **(HGC)**  $\kappa^\lambda = \kappa$ .

Podemos dar otra prueba de esta proposición: Primeramente, recordemos algunos hechos:

Tenemos que,  $[\kappa]^\lambda = \{a \subseteq \kappa / |a| = \lambda\}$  y que  $|[\kappa]^\lambda| = \kappa^\lambda$ . Ahora, sea

$$A_\kappa = \{a \subseteq \kappa / a \text{ es acotado en } \kappa\}$$

Obsérvese que si  $a$  es acotado en  $\kappa$ ,  $a \in A_\kappa$ , se tiene que  $|a| < \kappa$ , pero la conversa no es cierta (pues por ejemplo  $|\aleph[\omega]| = \aleph_0 < \aleph_\omega$  y  $\aleph[\omega]$  es no-acotado en  $\aleph_\omega$ ). Ahora, si  $a$  es un subconjunto no-acotado de  $\kappa$ , entonces  $|a|$  es cofinal en  $\kappa$  (¿Por qué?) y por tanto,  $\text{cof}(\kappa) \leq |a|$ , o equivalentemente, si  $a \subseteq \kappa$  tal, que  $|a| < \text{cof}(\kappa)$ , entonces  $a$  es acotado en  $\kappa$ .

Supongamos ahora que  $\lambda < \text{cof}(\kappa)$ , por lo dicho arriba,  $[\kappa]^\lambda \subseteq A_\kappa$ , pero  $A_\kappa \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} \wp(\alpha)$ . De todo esto, tenemos:

$$\kappa^\lambda = |[\kappa]^\lambda| \leq \left| \bigcup_{\alpha < \kappa} \wp(\alpha) \right| \leq \sum_{\alpha < \kappa} 2^{|\alpha|} \stackrel{\text{HGC}}{=} \sum_{\alpha < \kappa} |\alpha|^+ \leq \sum_{\alpha < \kappa} \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

†

Al suponer la **HGC**, la exponenciación cardinal queda perfectamente determinada:

**Corolario**<sub>6</sub>. (**HGC**) Sean  $\kappa, \lambda \in CAR$ . Así,

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si } \lambda < \text{cof}(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si } \text{cof}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \lambda^+ & \text{si } \kappa \leq \lambda \end{cases}$$