

## Exponenciación en base 2

Veamos ahora algunos resultados conocidos para la exponenciación en base 2. La funcional exponenciación en base 2 aplicada a cardinales transfinitos es conocida bajo el nombre de *Funcional Continuum*.

Los siguientes resultados son para cuando el exponente es límite.

Sean  $\kappa$  un cardinal límite y  $\eta = \text{cof}(\kappa)$ . Sabemos que  $\kappa = \sum_{\alpha < \eta} \kappa_\alpha$  con  $\eta \leq \kappa$  y  $\kappa_\alpha < \kappa$ , para toda  $\alpha < \eta$ . Con lo que, por lo pronto, tenemos

$$2^\kappa = 2^{\sum_{\alpha < \eta} \kappa_\alpha} = \prod_{\alpha < \eta} 2^{\kappa_\alpha} \dots\dots\dots (*)$$

Esta última parte,  $\prod_{\alpha < \eta} 2^{\kappa_\alpha}$ , nos remite a pensar en el conjunto de todas las potencias, en base 2, con exponentes menores a  $\kappa$  y podríamos acotar el producto anterior usando el supremo de éstas. Un poco de notación.

**Definición<sub>1</sub>.** Sea  $\kappa$  un cardinal límite. Pondremos

$$2^{<\kappa} = \sup \{ 2^\lambda \mid \lambda < \kappa \}$$

**Observación<sub>1</sub>:**

i) Para  $\kappa$  un cardinal límite, se tiene que,  $\kappa \leq 2^{<\kappa} \leq 2^\kappa$ . Pues:

Pongamos por lo pronto,  $2_{<\kappa} = \{ 2^\lambda \mid \lambda < \kappa \}$ .

El hecho de que  $2^{<\kappa} \leq 2^\kappa$ , se debe a que  $2^\kappa$  es cota superior de  $2_{<\kappa}$ .

Por otro lado; para cada  $\mu \in \kappa$ , se tiene que  $\mu < 2^\mu \in 2_{<\kappa}$ . Por tanto,

$$\kappa = \sup \kappa \leq \sup 2_{<\kappa} = 2^{<\kappa}$$

ii) No necesariamente  $2^{<\kappa} = 2^\kappa$ .

Pues, por ejemplo, tenemos

$$2^{<\aleph_0} = \sup \{ 2^n \mid n < \omega \} = \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$$

Otro ejemplo, bajo la **HGC**, es:

$$2^{<\aleph_\omega} = \sup \{ 2^{\aleph_n} \mid n < \omega \} = \sup \{ \aleph_{n+1} \mid n < \omega \} = \aleph_\omega \neq 2^{\aleph_\omega}$$

Con esta notación, continuemos con nuestras ideas.

$$2^\kappa = \prod_{\alpha < \eta} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha < \eta} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^\eta \leq (2^\kappa)^\eta = 2^{\kappa \cdot \eta} = 2^\kappa \quad \eta \leq \kappa$$

Con esto, hemos obtenido un resultado que podemos enunciar de la siguiente manera.

**Proposición<sub>7</sub>.** Si  $\kappa$  es un cardinal límite, entonces

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\text{cof}(\kappa)}$$

Regresando a nuestra ecuación (\*), bien podemos pensar en la posibilidad, la consistencia relativa lo permite, de que la exponenciación en base 2, con exponentes menores a  $\kappa$ , se estacione. Se tiene el siguiente resultado para cardinales singulares, casos particulares de cardinales límites.

**Proposición<sub>8</sub>.** Sea  $\kappa \geq \omega$  y singular. Así,

$$\forall \mu \left[ \forall \lambda \left( \omega \leq \lambda < \kappa \rightarrow 2^\lambda = \mu \right) \rightarrow 2^\kappa = \mu \right]$$

**Prueba:** Puesto que  $\kappa$  es singular,  $\kappa = \sum_{\alpha < \eta} \kappa_\alpha$  con  $\eta = \text{cof}(\kappa) < \kappa$  y  $\kappa_\alpha < \kappa$ , para toda  $\alpha < \eta$ . Ahora, supongamos que hay un  $\mu$ , con la propiedad de que  $2^\lambda = \mu$  para  $\omega \leq \lambda < \kappa$ .

$$2^\kappa = 2^{\sum_{\alpha < \eta} \kappa_\alpha} = \prod_{\alpha < \eta} 2^{\kappa_\alpha} = \prod_{\alpha < \eta} \mu = \mu^\eta = (2^\eta)^\eta = 2^{\eta \cdot \eta} = 2^\eta = \mu \quad (*)$$

(\*) como  $\eta < \kappa$ , se tiene que  $2^\eta = \mu$ . †

Por ejemplo, si supieramos que

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \dots = 2^{\aleph_n} = \dots = \aleph_{\omega+28}$$

el resultado nos garantiza que,  $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+28}$ .

Es de esperarse que este resultado también sea cierto si la funcional continuum se estaciona *a partir de un momento dado*. En vez de tratar de modificar la prueba anterior, daremos otra, basándonos en la primera proposición.

**Proposición<sub>9</sub>.** Sea  $\kappa \geq \omega$  y singular. Así,

$$\forall \lambda_0 \left[ \forall \lambda \left( \omega \leq \lambda_0 \leq \lambda < \kappa \rightarrow 2^{\lambda_0} = 2^\lambda \right) \rightarrow 2^\kappa = 2^{\lambda_0} \right]$$

**Prueba:** Tenemos que  $\omega \leq \text{cof}(\kappa) < \kappa$ . Basta considerar el caso en que  $\text{cof}(\kappa) \leq \lambda_0 < \kappa$  (pues en caso de que  $\lambda_0 < \text{cof}(\kappa)$ , por hipótesis,  $2^{\lambda_0} = 2^{\text{cof}(\kappa)}$  y sería suficiente con tomar  $\lambda_0 = \text{cof}(\kappa)$ ). Por hipótesis,  $2^{<\kappa} = \sup \{ 2^\lambda \mid \lambda < \kappa \} = 2^{\lambda_0}$ . De

esto y la **Proposición**<sub>7</sub>, tenemos:

$$2^\kappa = \underset{7}{(2^{<\kappa})}^{\text{cof}(\kappa)} = (2^{\lambda_0})^{\text{cof}(\kappa)} = 2^{\lambda_0 \cdot \text{cof}(\kappa)} \underset{\text{cof}(\kappa) \leq \lambda_0}{=} 2^{\lambda_0} \quad \dagger$$

Una pregunta natural es: ¿Qué ocurre si **no** se estaciona  $2^\lambda$  para  $\lambda < \kappa$ ? Se puede decir muy poco: Si  $2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda < \kappa\} = \mu$  para algún  $\mu \leq 2^\kappa$ ,  $\mu$  es el supremo de una sucesión monótona no-decreciente y por tanto,  $\text{cof}(\mu) = \text{cof}(\kappa)$  (¡Pobarlo!). Así,

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\text{cof}(\kappa)} = \mu^{\text{cof}(\mu)}$$

Tenemos una noción que es de relativa importancia en todo esto.

**Definición**<sub>2</sub>. La funcional *Gimel*,  $\lambda$ , queda definida como sigue,

$$\begin{aligned} \lambda &: CAR \rightarrow CAR \\ \forall \kappa \geq \omega \quad \lambda(\kappa) &= \kappa^{\text{cof}(\kappa)} \end{aligned}$$

En particular si  $\kappa$  es regular,  $\lambda(\kappa) = \kappa^{\text{cof}(\kappa)} = \kappa^\kappa = 2^\kappa$ , es decir la funcional gimel coincide con la *continuum* en los cardinales regulares.