

Cardinales Fuertes

Definición₃. Diremos que κ es (un Cardinal) Fuerte syss

$$\forall \lambda < \kappa \left[2^\lambda < \kappa \right]$$

Un ejemplo de cardinal fuerte es ω .

Observación₂:

- i) Si κ es un cardinal fuerte entonces es un cardinal límite.
Pues si $\kappa = \lambda^+$, entonces como $\lambda < \lambda^+$ se tiene que $2^\lambda \geq \lambda^+ = \kappa$ y por tanto, κ no es un cardinal fuerte.
- ii) Si κ es un cardinal límite, no necesariamente se tiene que sea un cardinal fuerte.
Por ejemplo: \aleph_ω es un cardinal límite y $\aleph_0 < \aleph_\omega$ y podría ser que, $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$.
- iii) Bajo la suposición de la **HGC** tenemos que, si κ es un cardinal límite, entonces κ es un cardinal fuerte.

Veamos algunas propiedades de los cardinales fuertes.

Proposición₁₀. Los cardinales fuertes son cerrados bajo la operación de exponenciación cardinal:

$$\forall \lambda, \mu < \kappa \left[\lambda^\mu < \kappa \right]$$

Prueba: Sea κ un cardinal fuerte y sean $\lambda, \mu < \kappa$. Así,

$$\lambda^\mu \leq (\lambda + \mu)^{\lambda + \mu} = 2^{\lambda + \mu} < \kappa$$

teniendo en cuenta, por supuesto, que $\lambda + \mu = \max\{\lambda, \mu\} < \kappa$. †

Hay muchos cardinales fuertes, distintos de ω , de hecho tenemos:

Proposición₁₁. La clase de los cardinales fuertes es confinal con *CAR*.

$$\forall \lambda \exists \kappa \left[\kappa > \lambda \ \& \ \kappa \text{ es fuerte} \right]$$

Prueba: Sea $\lambda \in \text{CAR}$ arbitrario. Definimos recursivamente f_λ como sigue:

$$f_\lambda : \omega \rightarrow \text{CAR}$$

$$\text{i) } f_\lambda(0) = \lambda$$

$$\text{ii) } \forall n \in \omega, f_\lambda(n^+) = 2^{f_\lambda(n)}$$

Sea $\kappa = \lim_{n \rightarrow \omega} f_\lambda(n)$. Así, κ satisface lo pedido. De hecho, entre λ y κ no hay ningún cardinal fuerte. †

Una propiedad que no podemos dejar de mencionar es:

Proposición₁₂.

- i). Si κ es fuerte, entonces $2^{<\kappa} = \kappa$. Y por tanto, para κ un cardinal fuerte, se tiene que $2^{<\kappa} < 2^\kappa$.
- ii). Si $2^{<\kappa} = \kappa$ y κ es singular, entonces κ es fuerte.

Prueba:

- i). Sea κ un cardinal fuerte. Tenemos que κ es límite y por la **Observación_{1.i}**, $\kappa \leq 2^{<\kappa}$. Por otro lado, de la definición de fuerte, κ es cota superior de $\{2^\lambda / \lambda < \kappa\}$ y por tanto, $2^{<\kappa} \leq \kappa$.
- ii). Si κ es singular y $2^{<\kappa} = \kappa$, entonces la función *continuum* **no** se puede estacionar por abajo de κ , pues en caso contrario habría una contradicción con la **Proposición₉**. Sea pues, $\mu < \kappa$; hay un μ_0 tal que $\mu < \mu_0 < \kappa$ y $2^\mu < 2^{\mu_0} \leq 2^{<\kappa} = \kappa$. †

Corolario₁₃. Si κ es fuerte, entonces $2^\kappa = \kappa^{Cof(\kappa)} = \lambda(\kappa)$.

Prueba: $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{Cof(\kappa)} = \kappa^{Cof(\kappa)}$ †

Podemos dar otros ejemplos de cardinales límites que son fuertes, y para ello, nos ayudamos con:

Definición₄. La funcional *Beth*, \beth , queda definida recursivamente sobre *OR*, como sigue:

$$\begin{aligned} \beth &: OR \rightarrow CAR \\ \text{i)} \quad \quad \quad \beth_0 &= \aleph_0 \\ \text{ii)} \quad \quad \forall \alpha, \quad \beth_{\alpha+1} &= 2^{\beth_\alpha} \\ \text{iii)} \quad \forall \beta \in LIM, \quad \beth_\beta &= \sup \{ \beth_\alpha / \alpha < \beta \} \end{aligned}$$

Observación₃.

1. Bajo la suposición de la **HGC**, $\forall \alpha, \beth_\alpha = \aleph_\alpha$.
2. Si $\alpha \in LIM$, entonces \beth_α es fuerte.
3. Para $\alpha \in OR$, se tiene que $\beth_{\alpha+\omega}$ es el primer cardinal fuerte mayor que \beth_α .
4. Todo cardinal fuerte es un *beth*. (**TAREA**)
5. Si $\alpha \in LIM$, entonces $cof(\beth_\alpha) = cof(\alpha)$.
6. $\beth_\omega, \beth_{\omega_1}, \beth_{\omega_\omega}, \dots$ son cardinales fuertes y singulares.
7. La Funcional \beth , es monótona y continua, es decir es normal.

8. El primer punto fijo de beth, $\beth_\kappa = \kappa$, es un cardinal fuerte que tiene cofinalidad ω y por tanto es singular.

Es claro que la beth nos proporciona muchos ejemplos de cardinales fuertes. Pero todos los que conocemos son singulares. ¿Habrá cardinales incontables, fuertes y regulares? La respuesta es similar a la dada para los cardinales (débilmente) inaccesibles. Formalizemos:

Definición₅. (Sierpinski–Tarski)

κ es un *Cardinal Fuertemente Inaccesible* si

- i) $\kappa > \omega$,
- ii) κ es un cardinal fuerte, Y
- iii) κ es un cardinal regular.

Puesto que los cardinales fuertes son cardinales límites, entonces *todo fuertemente inaccesible es (débilmente) inaccesible*. Y si suponemos la **HGC** tenemos que *todo (débilmente) inaccesible es fuertemente inaccesible*.

Los cardinales fuertemente inaccesibles tienen propiedades de cerradura muy fuertes y de ahí el nombre.

Proposición₁₄. Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Así:

1. Si $|a| < \kappa$, entonces $|\wp(a)| < \kappa$.
2. Si para toda $i \in I$, $|a_i| < \kappa$, con $|I| < \kappa$, entonces $\left| \bigcup_{i \in I} a_i \right| < \kappa$.
3. Si $|a| < \kappa$ y $f: a \rightarrow \kappa$, entonces $\left| \bigcup f[a] \right| < \kappa$.

Prueba: TAREA.

Terminamos esta sección con un comentario:

Bajo la suposición de la existencia de cardinales inaccesibles, es consistente que 2^{\aleph_0} sea débilmente inaccesible o que sea tan grande como el primer inaccesible débil.