Modelos Internos

Trabajaremos en el lenguaje formal (de primer órden) para la teoría de conjuntos, $\mathcal{L}_\in$.

En lo que sigue, sean M una clase -una fórmula- y E una relacional -otra fórmula- sobre M, es decir, $E \subseteq M \times M$.

Sea $\varphi \in FRM_\in$. Definimos recursivamente, en el metalenguaje, *la relativización de* φ *a* M,E, denotado por $\varphi^{M,E}$, como sigue:

1. Sean $x, y \in VAR$. Así:

a. $(x \in y)^{M,E} \rightleftharpoons \left(x\, E\, y\right)$

b. $(x = y)^{M,E} \rightleftharpoons (x = y)$

2. Sean $\psi, \chi \in FOR_\in$ y $x \in VAR$. Así:

a. $(\neg\psi)^{M,E} \rightleftharpoons \neg(\psi^{M,E})$

b. $(\psi \ \&\ \chi)^{M,E} \rightleftharpoons \left(\psi^{M,E} \ \&\ \chi^{M,E}\right)$.

c. $\left(\exists\, x\, \psi\right)^{M,E} \rightleftharpoons \left(\exists\, x \left(x \in M \ \&\ \psi^{M,E}\right)\right)$

Notación: Sea $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_\in^0$.

1. Si $\Sigma \vdash \sigma^{M,E}$ diremos que σ es *verdadero en* M,E *según* Σ o que M,E es *un Modelo de* σ, *según* Σ.

2. Escribiremos $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$ para denotar que *todos los enunciados de* Γ *son verdaderos en* M,E, *según* Σ.

3. Si $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$ diremos que M,E, es un *Modelo de* Γ, *según* Σ.

Ejemplos: …

Metateorema Fundamental para pruebas relativas de consistencia con modelos internos de la Teoría de conjuntos:

Sean M una clase y E una relacional sobre M, es decir, $E \subseteq M \times M$ y sea $\Sigma \cup \Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_{\in}$.

Si:

1. $\Sigma \vdash \exists\, x\, (x \in M)$ y
2. $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$,

entonces:

$$CON(\Sigma) \Rightarrow CON(\Gamma)$$

Prueba: (Para aquellos que hayan llevado un segundo curso de Lógica Matemática)

Supongamos que Σ es consistente, por lo tanto, Σ tiene un $\in$–modelo, e.d. hay $\mathfrak{A} = \langle A,\, r\rangle \in V_{\in}$, con A un conjunto no vacío y $\in^{\mathfrak{A}} = r \subseteq A \times A$, tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Basta probar que Γ tiene un modelo.

Definimos:

1. $B \subseteq A$, como sigue:

$$B = \left\{ b \in A \;\; / \;\; \mathfrak{A} \models x \in M\,[b] \right\} \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

2. $s \subseteq B \times B$, como sigue: Sean $x, y \in VAR$; para todo $b_0, b_1 \in B$,

$$b_0\; s\; b_1 \text{ syss } \mathfrak{A} \models \left(x\, E\, y \right) [b_0, b_1] \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Tenemos que $B \subseteq A \neq \emptyset$, pero también se tiene que $B \neq \emptyset$ pues: $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\Sigma \vdash \exists\, x\, (x \in M)$, por lo que $\mathfrak{A} \models \exists\, x\, (x \in M)$. Así, hay un $b_0 \in A$ con la propiedad de que $\mathfrak{A} \models x \in M\,[b_0]$ y por tanto $b_0 \in B$.

Ahora, si ponemos $\in^{\mathfrak{B}} = s$, resulta que $\mathfrak{B} = \langle B,\, s\rangle$ es una interpretación del lenguaje $\mathcal{L}_{\in}$, es decir $\mathfrak{B} \in V_{\in}$. Afirmamos que $\mathfrak{B} \models \Gamma$, para ello probaremos antes, algo más fuerte:

Af$_1$. Para toda $\varphi \in FORM_{\in}$, se tiene que:

$$\text{para toda } t \in {}^{\omega}B,\; \mathfrak{A} \models \varphi^{M,E}\left[\, t \,\right] \text{ syss } \mathfrak{B} \models \varphi\left[\, t \,\right]. \qquad (\bigstar)$$

Prueba: Esta se hará por inducción sobre la formación de fórmulas:

I. Sean $x, y \in VAR$. Supongamos que $b_0, b_1 \in B$. Así:

a) $\mathfrak{A} \models (x \in y)^{M,E}\left[b_0,\, b_1\right]$ syss $\mathfrak{A} \models \left(x\, E\, y\right)\left[b_0,\, b_1\right]$ Def.

syss $b_0\, s\, b_1$ (**)

syss $\mathfrak{B} \models (x \in y)\left[b_0,\, b_1\right]$ Tarsky $(\in^{\mathfrak{B}} = s)$

b) $\mathfrak{A} \models (x = y)^{M,E}\left[b_0,\, b_1\right]$ syss $\mathfrak{A} \models (x = y)\left[b_0,\, b_1\right]$ Def.

syss $b_0 = b_1$ Tarsky

syss $\mathfrak{B} \models (x = y)\left[b_0,\, b_1\right]$ Tarsky

II: Sean $\psi, \chi \in FOR_{\in}$ y supongamos, inductivamente, que cumplen $(\bigstar)$ y sea $v_i \in VAR$.

Sea $t \in {}^{\omega}B$, así:

a) $\mathfrak{A} \models (\neg\psi)^{M,E}\left[\, t\, \right]$ syss $\mathfrak{A} \models \neg(\psi^{M,E})\left[\, t\, \right]$ Def.

syss $\mathfrak{A} \not\models \psi^{M,E}\left[\, t\, \right]$ Tarsky

syss $\mathfrak{B} \not\models \psi\left[\, t\, \right]$ HI $(\bigstar)$

syss $\mathfrak{B} \models \neg\psi\left[\, t\, \right]$ Tarsky

b) $\mathfrak{A} \models (\psi\ \&\ \chi)^{M,E}\left[\, t\, \right]$ syss $\mathfrak{A} \models (\psi^{M,E})\ \&\ (\chi^{M,E})\left[\, t\, \right]$ Def.

syss $\mathfrak{A} \models (\psi^{M,E})\left[\, t\, \right]$ y $\mathfrak{A} \models (\chi^{M,E})\left[\, t\, \right]$ Tarsky

syss $\mathfrak{B} \models \psi\left[\, t\, \right]$ y $\mathfrak{B} \models \chi\left[\, t\, \right]$ HI $(\bigstar)$

syss $\mathfrak{B} \models (\psi\ \&\ \chi)\left[\, t\, \right]$ Tarsky.

c)

$\mathfrak{A} \models \left(\exists v_i\, \psi\right)^{M,E}\left[\, t\, \right]$ syss $\mathfrak{A} \models \exists v_i \left(\, v_i \in M\ \&\ \psi^{M,E}\, \right)\left[\, t\, \right]$ Def.

syss hay $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \left(\, v_i \in M\ \&\ \psi^{M,E}\, \right)\left[t\left(v_i / a\right)\right]$ Tarsky

syss hay $a \in A$, tal que

$\mathfrak{A} \models v_i \in M\left[t\left(v_i / a\right)\right]$ y $\mathfrak{A} \models \psi^{M,E}\left[t\left(v_i / a\right)\right]$ Tarsky

syss hay $b \in B$, tal que $\mathfrak{B} \models \psi\left[t\left(v_i / b\right)\right]$ (*) e HI

syss $\mathfrak{B} \models \exists v_i\, \psi\left[\, t\, \right]$ Tarsky

†

De aquí, como caso particular, tenemos la siguiente:

Af$_2$. Para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\in}$ se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \sigma^{M,E} \text{ syss } \mathfrak{B} \models \sigma$$

Prueba del MT fundamental:

Puesto que $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$ y $\mathfrak{A} \models \Sigma$, tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma^{M,E}$ para todo $\sigma \in \Gamma$ y aplicando la **Af$_2$**., obtenemos que: para todo $\sigma \in \Gamma$, $\mathfrak{B} \models \sigma$; concretando $\mathfrak{B} \models \Gamma$ y por tanto Γ es consistente. †