Modelos Estandar.

En esta sección trabajaremos, por lo general, dentro de $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\in$, donde Σ variará entre

$$\mathbf{Z}^- - \mathbf{ZF}_7 \subseteq \Sigma \subseteq \mathbf{ZF}^-$$

En el caso en que usemos más o menos axiomas, lo haremos explícito.

Consideraremos *Modelos Estandar, en* Σ, esto es, para clases M y $E \subseteq M \times M$, las cuales cumplen con lo siguiente,

1. $\Sigma \vdash \exists x\,(x \in M)$,
2. $\Sigma \vdash M$ una clase transitiva, y
3. $E = \left\{ \left\langle x, y \right\rangle \in M \times M \ / \ x \in y \right\} = \ \in_M$

Si φ es una $\in$–fórmula, su relativización al modelo estandar $M, \ \in_M$ se acostrumbra a denotarlo símplemente por, φ^M.

Lo que haremos en esta parte es ver qué condiciones habrá que exigir a M, para tener que M es un modelo de algún axioma de la teoría de Zermelo–Fraenkel. Es decir, dado un $\sigma \in$ **ZF** ¿para qué tipo de clase M se tiene que,

$$\Sigma \vdash \sigma^M$$

Al suponer que trabajamos en Σ y considerar modelos estandar, tenemos inmediatamente,

- $\Sigma \vdash \left(\mathbf{ZF}_1\right)^M$.
- $\Sigma \vdash \left(\mathbf{ZF}_2\right)^M$ syss $\emptyset \in M$.

Pasemos ahora a ver los otros axiomas.

- $\left(\textbf{Ax. Par}\right)^M$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ZF}_3)^M \ &\leftrightharpoons \ \left(\forall x \forall y \exists z \forall w \left[\ w \in z \leftrightarrow \left(\ w = x \vee w = y\ \right)\ \right]\right)^M \\
&= \ \forall x \in M\, \forall y \in M\, \exists z \in M\, \forall w \in M \left[\ w \in z \leftrightarrow \left(\ w = x \vee w = y\ \right)\ \right] \\
&\leftrightarrow \ \forall x \in M\, \forall y \in M\, \exists z \in M \left[\ z = \{x, y\}\ \right] \qquad M \text{ transa}
\end{aligned}$$

Por lo que, desde Σ se tiene

$$\left(\mathbf{ZF}_3\right)^M \text{ syss } \forall x \in M \forall y \in M\left[\ \{x, y\} \in M\ \right]$$

- $\left(\textbf{Ax. Unión}\right)^M$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ZF}_4)^M &= \left(\forall x \exists z \forall w\left[w \in z \leftrightarrow \exists y(y \in x \ \&\ w \in y)\right]\right)^M \\
&= \forall x \in M\, \exists z \in M\, \forall w \in M\left[w \in z \leftrightarrow \exists y \in M(y \in x \ \&\ w \in y)\right] \\
&\leftrightarrow \forall x \in M\, \exists z \in M\left[z = \bigcup x\right]
\end{aligned}$$

Por lo que, desde Σ se tiene

$$\left(\mathbf{ZF}_3\right)^M \text{ syss } \forall x \in M\left[\bigcup x \in M\right]$$

- $\left(\textbf{Ax. Potencia}\right)^M$.

Sean $x, y \in M$ observemos los siguiente:

$$\begin{aligned}
(x \subseteq y)^M &\leftrightharpoons \left(\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)\right)^M \\
&= \forall z \in M\left(z \in x \rightarrow z \in y\right) \\
&\leftrightarrow x \cap M \subseteq y \\
&\leftrightarrow x \subseteq y \qquad\qquad (M \text{ transitiva})
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ZF}_5)^M &\leftrightharpoons \left(\forall x \exists z \forall w\left[w \in z \leftrightarrow w \subseteq x\right]\right)^M \\
&= \forall x \in M\, \exists z \in M\, \forall w \in M\left[w \in z \leftrightarrow (w \subseteq x)^M\right] \\
&\leftrightarrow \forall x \in M\, \exists z \in M\, \forall w \in M\left[w \in z \leftrightarrow w \subseteq x\right] \\
&\leftrightarrow \forall x \in M\, \exists z \in M\left[z = \left\{w \in M \ /\ w \subseteq x\right\}\right]
\end{aligned}$$

Con esto podemos probar que, desde Σ se tiene

$$(\mathbf{ZF}_5)^M \text{ syss } \forall x \in M\left[\ \wp(x) \cap M \in M\right]$$

- $\left(\textbf{Esq. Ax. de Comprensión}\right)^{M}$.

Sea φ una $\in$–fórmula, donde la variable z no ocurre.

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbf{ZF}_6)^M & \leftrightharpoons & \Big(\forall x \exists z \forall w \Big[w \in z \leftrightarrow \big(w \in x \ \& \ \varphi(w) \big) \Big]\Big)^M \\
 & = & \forall x \in M\, \exists z \in M\, \forall w \in M \Big[w \in z \leftrightarrow \big(w \in x \ \& \ \varphi^M(w) \big) \Big] \\
 & \leftrightarrow & \forall x \in M\, \exists z \in M\, \forall w \Big[w \in z \leftrightarrow \big(w \in x \ \& \ \varphi^M(w) \big) \Big] \qquad M \text{ Transa} \\
 & \leftrightarrow & \forall x \in M\, \exists z \in M \Big[z = \big\{ w \in x \ / \ \varphi^M(w) \big\} \Big]
\end{array}
$$

En resumen tenemos, para cualquier $\varphi \in FRM_{\in}$, desde Σ se tiene

$$(\mathbf{ZF}_6)^M \text{ syss } \forall x \in M \Big[\ \big\{ w \in x \ / \ \varphi^M(w) \big\} \in M \ \Big]$$

Como un corolario tenemos un caso particular que usaremos más adelante.

- Si $\forall x \in M \big[\ \wp(x) \subseteq M \big]$, entonces $\left(\mathbf{ZF}_6\right)^M$.

Veamos una aplicación.

Sea $M = \{ \emptyset \}$. Puesto que M es una clase no–vacía y transitiva, tenemos que $\left(\mathbf{ZF}_1\right)^M$ y $\left(\mathbf{ZF}_2\right)^M$. Además, como $\forall x \in M \big[\ \wp(x) \subseteq M \big]$, por el corolario anterior se tiene que $\left(\mathbf{ZF}_6\right)^M$. Pero también se tiene que $\left(\forall x \left[\ x = \emptyset \ \right]\right)^M$ es decir, $\left(\forall x \, \forall y \left[\ y \notin x \ \right]\right)^M$. Con esto tenemos,

$$CON(\Sigma) \Rightarrow CON\big(\mathbf{ZF}_1 + \mathbf{ZF}_2 + \mathbf{ZF}_6 + \forall x \left[\ x = \emptyset \ \right]\big)$$

Donde $\Sigma = \mathbf{ZF}_1 + \mathbf{ZF}_2 + \mathbf{ZF}_3 + \mathbf{ZF}_4 + \mathbf{ZF}_5$.

Pasemos con otro axioma.

- $\left(\textbf{Esq. Ax. de Reemplazo} \right)^{M}$.

Sea $\varphi(x,y)$ una $\in$–fórmula, donde las variables x e y ocurren libres y la variable z no ocurre libre.

$(\mathbf{ZF}_8)^M$

$$\leftrightharpoons \quad \Big(\forall x \exists ! y \varphi(x,y) \;\rightarrow\; \forall u \exists z \forall y \Big[y \in z \;\leftrightarrow\; \exists x (x \in u \;\&\; \varphi(x,y)) \Big]\Big)^M$$

$$= \quad \forall x \in M\, \exists ! y \in M\, \varphi^M(x,y)$$
$$\rightarrow \quad \forall u \in M\, \exists z \in M\, \forall y \in M \Big[y \in z \;\leftrightarrow\; \exists x \in M (x \in u \;\&\; \varphi^M(x,y)) \Big]$$

$$\leftrightarrow \quad \forall x \in M\, \exists ! y \in M\, \varphi^M(x,y)$$
$$\rightarrow \quad \forall u \in M\, \exists z \in M\, \forall y \in M \Big[y \in z \;\leftrightarrow\; \exists x (x \in u \;\&\; \varphi^M(x,y)) \Big] \qquad M \text{ Transa}$$

$$\leftrightarrow \quad \forall x \in M\, \exists ! y \in M\, \varphi^M(x,y)$$
$$\rightarrow \quad \forall u \in M\, \exists z \in M \Big[z = \Big\{ y \in M \;/\; \exists x \big(x \in u \;\&\; \varphi^M(x,y) \big) \Big\} \Big]$$

En resumen tenemos, para cualquier $\varphi(x,y) \in FRM_{\in}$ (con x e y ocurriendo libres) es verdad en Σ que, $(\mathbf{ZF}_8)^M$ syss

$$\forall x \in M\, \exists ! y \in M\, \varphi^M(x,y) \;\rightarrow\; \forall u \in M \Big[\Big\{ y \in M \;/\; \exists x \big(x \in u \;\&\; \varphi^M(x,y) \big) \Big\} \in M \Big]$$

Aquí se supone que nuestro conjunto Σ es tal que $\Sigma \supseteq \mathbf{ZF}^- - \mathbf{ZF}_6$.

Veamos ahora un par de ejemplos. En $\Sigma = \mathbf{ZF}^-$, se prueba que R_ω es un conjunto no–vacío y transitivo, también se tiene a $BF = \bigcup_{\alpha \in OR} R_\alpha$, como una clase propia y transitiva. Por lo que, en Σ, ambos son modelos estandar.

Por lo pronto consideremos a M indistintamente como R_ω o como BF. Con lo que sabemos de M, se tiene inmediatamente que M es modelo de $\mathbf{ZF}_1 + \mathbf{ZF}_2 + \mathbf{ZF}_3 + \mathbf{ZF}_4$. Puesto que, si $a \in M$ entonces $\wp(a) \in M$, tenemos que $\wp(a) \subseteq M$; de aqui que, gracias a las observaciones anteriores, M es modelo de $\mathbf{ZF}_5$ y de $\mathbf{ZF}_6$. Veamos ahora que M también es modelo de $\mathbf{ZF}_8$.

Sean $\varphi(x,y) \in FRM_{\in}$, $a \in M$ y

$$b = \Big\{ y \in M \;/\; \exists x \big(x \in a \;\&\; \varphi^M(x,y) \big) \Big\}$$

Así, $b \subseteq M$. Si $M = BF$, entonces $b \in M$, pues todo conjunto de conjuntos bien fundados es un conjunto bien fundado. Si $M = R_\omega$, entonces $|\, b \,| \leq |\, a \,| < \omega$; así, para algún $n \in \omega$, tenemos que $a \in R_{n+1} \subseteq M$. Finalmente, en cualquier caso, M es modelo de Sustitución o de Reemplazo.

Para terminar esta sección, veamos para que clases M se tiene que M es modelo del Axioma de Buena Fundación. Por lo pronto tenemos que,

$$\mathbf{ABF}^M \leftrightharpoons \left[\forall x\left(\exists y\,(y\in x)\ \rightarrow\ \exists y\big(\,y\in x\ \&\ \neg\exists z(z\in x\ \&\ z\in y)\,\big)\right)\right]^M$$
$$=\ \forall x\in M\Big[\exists y\in M\,(y\in x)\ \rightarrow\ \exists y\in M\,\big(y\in x\ \&\ \neg\exists z\in M\,(z\in x\ \&\ z\in y)\big)\Big]$$

Si la clase M fuera de conjuntos bien fundados, es decir $M\subseteq BF,$ podríamos usar el rango de un conjunto para obtener lo que queremos. Supongamos pues, que $x\in M$ y que $y\in M\cap x.$ Ahora si tomamos al $y_0\in M\cap x$ de rango mínimo, éste es uno que cumple con lo que pide el axioma. Con esto tenemos,

$$\mathbf{ZF}^{-}\vdash M\subseteq BF\rightarrow\mathbf{ABF}^M$$

Obsérvese que para tener este resultado, no se necesita que la clase M sea transitiva. Como casos particulares, el resultado es cierto para $M=R_\omega$ y $M=BF.$

El Axioma de Infinito, $\mathbf{ZF_8},$ afirma la existencia de un conjunto inductivo. Y la definición de inductivo involucra las nociones de conjunto vacío –de una constante– y del sucesor de un conjunto –una funcional– nociones que trabajaremos en general en la siguiente sección, así que lo dejaremos pendiente.

Para tenerlos a la mano, resumimos nuestros últimos ejemplos en el siguiente resultado.

Proposición .

1. $\mathbf{ZF}^{-}\vdash\left(\mathbf{ZF}-\mathbf{ZF}_7\right)^{R_\omega}$
2. $\mathbf{ZF}^{-}\vdash\left(\mathbf{ZF}-\mathbf{ZF}_7\right)^{BF}$

Y usando el Metateorema Fundamental para pruebas relativas de consistencia, tenemos,

Corolario . $CON\left(\mathbf{ZF}^{-}\right)\Rightarrow CON\left(\mathbf{ZF}-\mathbf{ZF}_7\right)$