Absolutez

Definición₁. Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}^n_\in$, M, N clases y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\in$.

I. Diremos que φ es *Absoluta* M, N, según Σ syss

a) $\Sigma \vdash M \subseteq N$, y

b). $\Sigma \vdash \forall x_1, \dots, x_n \in M\left[\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \dots, x_n)\right]$

II. Diremos que φ es *Absoluta para* M, según Σ syss φ es absoluta M, V, según Σ, es decir

$$\Sigma \vdash \forall x_1, \dots, x_n \in M\left[\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)\right]$$

Observaciones. (En Σ)

1. Si φ es absoluta tanto para M como para N y $M \subseteq N$, entonces φ es absoluta M, N.

2. $(v_0 = v_1)$ y $(v_0 \in v_1)$ son absolutas para cualquier par M, N siempre que $M \subseteq N$.

3. Si φ y ψ son absolutas M, N, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \,\&\, \psi$ son absolutas M, N.

Podemos enununciar la siguiente,

Proposición₁. (En Σ) Para cualesquiera clases M y N, con $M \subseteq N$, y cualquier $\varphi \in FRM_\in$ se tiene que, si φ es booleana (sin cuantificadores), entonces φ es absoluta M, N.

Para fórmulas más complejas en general ya no son absolutas. Por ejemplo,

Sea $M = \{0, \{1\}\}$. Se tiene que $(\{1\} \subseteq 0)^M$, pues siendo cierto que $\left(\forall x\left(x \in \{1\} \to x \in 0\right)\right)^M$, tenemos que $\{1\} \not\subseteq 0$. Para este M, y por tanto no para toda clase, la relacional $\subseteq$, no es absoluta.

En modelos transitivos algunas fórmulas que son cuantificaciones sobre booleanas resultan ser absolutas, sin embargo hay principios más generales que nos permiten esclarecer la absolutez.

Proposición₂. (En Σ) Sean M y N clases transitivas, $M \subseteq N$, y $\varphi(x,y,z_1,\dots,z_n) \in \mathcal{L}^{n+2}_\in$ absoluta M, N. Así,

$$\exists x\left(x \in y \,\&\, \varphi(x,y,z_1,\dots,z_n)\right)$$

es absoluta M, N.

Prueba: Sean $y, z_1, \dots, z_n \in M$. Tenemos

$$
\begin{array}{lll}
 & \left[\exists x \left(x \in y \ \& \ \varphi(x,y,z_1,\dots,z_n) \right)\right]^M & \\
\leftrightarrow & \exists x \in M \left(x \in y \ \& \ \varphi^M(x,y,z_1,\dots,z_n) \right) & \text{Def.} \\
\leftrightarrow & \exists x \left(x \in y \ \& \ \varphi^N(x,y,z_1,\dots,z_n) \right) & M \text{ transa y } \varphi \text{ abs. } M,\ N \\
\leftrightarrow & \exists x \in N \left(x \in y \ \& \ \varphi^N(x,y,z_1,\dots,z_n) \right) & y \in M \subseteq N \text{ y } N \text{ transa} \\
\leftrightarrow & \left[\exists x \left(x \in y \ \& \ \varphi(x,y,z_1,\dots,z_n)\right)\right]^N & \text{Def.} \qquad \dagger
\end{array}
$$

Algunas veces, en lugar de escribir $\exists x \left(x \in y \ \& \ \varphi \right)$, escribiremos $\exists x \in y\, \varphi$. Y diremos que $\exists x \in y$ es un *Cuantificador Acotado.* A una fórmula con todos sus cuantificadores acotados se le llama una *Fórmula* Δ_0. Demos una definición rigurosa de esto.

Definición₂. El conjunto de *Fórmulas* Δ_0 es el $\subseteq$–menor conjunto de $\in$–expresiones que cumple con,

I. Para cualquier $x, y \in VAR$, se tiene que $(x \in y) \in \Delta_0$ y $(x = y) \in \Delta_0$. Y

II. Para $x, y \in VAR$, $\varphi, \psi \in FRM_{\in}$ se tiene que

a). Si $\varphi, \psi \in \Delta_0$, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \ \& \ \psi) \in \Delta_0$, y

b). Si $\varphi \in \Delta_0$, entonces $\exists x \left(x \in y \ \& \ \varphi \right) \in \Delta_0$.

Con esto podemos enunciar el siguiente,

Corolario₃. (En Σ) Sean M y N clases transitivas y $M \subseteq N$. Así,

1. Si $\varphi \in \Delta_0$, entonces φ es absoluta M,N. En particular,
2. Si $\varphi \in \Delta_0$, entonces φ es absoluta para M.

Por ejemplo, $x \subseteq y$ **NO** es una fórmula Δ_0, pero es absoluta para modelos transitivos; el criterio anterior, no lo podemos aplicar. Sin embargo,

$$
\begin{array}{rcl}
(x \subseteq y) & \leftrightharpoons & \forall w \, (w \in x \rightarrow w \in y) \\
 & \leftrightarrow & \neg\exists w \, \neg\left(w \in x \rightarrow w \in y \right) \\
 & \leftrightarrow & \neg\exists w \left(w \in x \ \& \ w \notin y \right) \\
 & \leftrightarrow & \neg\exists w \in x \left(w \notin y \right)
\end{array}
$$

Esta resulta ser equivalente a una Δ_0. No es difícil probar que fórmulas las cuales son equivalentes a fórmulas Δ_0 también son absolutas.

Proposición$_4$. Sean $\Sigma \cup \Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_\in$ y $\varphi,\ \psi \in \mathcal{L}^n_\in$. Sean M y N clases tales que $\Sigma \vdash M \subseteq N$. Así,

1. Si $\Sigma \vdash \Gamma^M$ y $\Sigma \vdash \Gamma^N$ y

$$\Gamma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n) \right]$$

entonces φ es absoluta $M,N,$ según Σ syss ψ es absoluta $M,N,$ según Σ.

Se podría pedir *algo más débil,*

2. Si

a. $\Sigma \vdash \left(\forall x_1, \ldots, x_n \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n) \right] \right)^M$ y

b. $\Sigma \vdash \left(\forall x_1, \ldots, x_n \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n) \right] \right)^N$,

entonces φ es absoluta $M,N,$ según Σ syss ψ es absoluta $M,N,$ según Σ. †

Con esto tenemos inmediatamente el siguiente,

Corolario$_5$. (En Σ) Sean M y N clases transitivas y $M \subseteq N$. Así,

1. Si $\varphi \in \Delta_0$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$, entonces ψ es absoluta M,N. Y

2. Si $\varphi \in \Delta_0$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$, entonces ψ es absoluta para M.

Tenemos dos ejemplos,

1. $x \subseteq y$ es absoluta, es decir la fórmula $\forall w(w \in x \to w \in y)$, para cualquier clase transitiva $($según $\Sigma)$, y

2. Si $\varphi \in \Delta_0$ o φ es absotuta $M,N,$ entonces $\forall x \in y\ \varphi$ es absoluta M,N; para clases transitivas $($según $\Sigma)$.

Pasemos ahora a ver la absolutez de algunas nociones definidas, como son las relacionales, las funcionales y las constantes. Las definiciones de todas y cada una de ellas están dentro de un contexto, es decir, se hacen a partir de un conjunto de axiomas, digamos Σ.

Para definir una relacional R de aridad n, en Σ, necesitamos una $\in$–fórmula con exactamente n variables libres, digamos $\varphi\big(x_1, \ldots, x_n\big)$. Y escribiremos $\big\langle a_1, \ldots, a_n\big\rangle \in R$ en lugar de $\varphi\big(a_1, \ldots, a_n\big)$. Con ello, podemos agregar a nuestro lenguaje, $\mathscr{L}_\in$, un nuevo símbolo, a R. Ahora ya podemos definir la absolutez para relacionales.

Definición . Sean M, N clases y R una relacional definida por la $\in$–fórmula φ. Diremos que R es *Absoluta* M,N, según Σ, syss φ es absoluta M,N, según Σ.

Obsérvese que, independientemente de la absolutez o no de la relacional R, tenemos derecho de hablar de la relativización de su fórmula definitoria φ^M y por tanto de R^M. A manera de ejemplo, para cualquier M, si $a,b \in M$ tiene sentido preguntarse si $a \subseteq^M b$.

Para definir una constante en Σ, digamos c, necesitamos una $\in$–fórmula con exactamente una variable libre, digamos $\chi(y)$ y tener que

$$\Sigma \vdash \exists! y\ \chi(y)$$

Y podremos agregar al lenguaje la constante c.

Definición . Sean M, N clases y c una funcional definida por $\chi(y)$, en Σ. Supongamos además que

$$\Sigma \vdash \big(\exists! y\ \chi(y)\big)^M \text{ y } \Sigma \vdash \big(\exists! y\ \chi(y)\big)^N$$

Diremos que c es *Absoluta* M,N, según Σ, syss χ es absoluta M,N, según Σ.

Si $\Sigma \vdash M \subseteq N$, entonces c es absoluta M,N, según Σ syss

$$\Sigma \vdash \forall y \in M\Big[\chi^M(y) \leftrightarrow \chi^N(y)\Big] \text{ o } \Sigma \vdash \forall y \in M\Big[c^M = y \leftrightarrow c^N = y\Big] \text{ o } \Sigma \vdash c^M = c^N$$

Las cosa no es tan fácil para las funcionales. Para definir una funcional de aridad n, digamos F, en Σ, necesitamos una $\in$–fórmula con exactamente $n+1$ varibles libres, digamos $\psi\big(x_1, \ldots, x_n, y\big)$, junto con el hecho importante de que,

$$\Sigma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n\ \exists! y\ \psi\big(x_1, \ldots, x_n, y\big)$$

Siendo el caso, podemos agregar a nuestro lenguaje un nuevo símbolo, una letra funcional, a F. Y escribiremos $F\big(a_1, \ldots, a_n\big) = b$ para el caso en que se tenga

$\psi(a_1, \ldots, a_n, b)$.

Definición . Sean M, N clases y F una funcional definida por $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$, en Σ. Supongamos además que

$\Sigma \vdash (\forall x_1, \ldots, x_n \, \exists! y \, \psi(x_1, \ldots, x_n, y))^M$ y $\Sigma \vdash (\forall x_1, \ldots, x_n \, \exists! y \, \psi(x_1, \ldots, x_n, y))^N$

Diremos que F es *Absoluta* M, N, según Σ, syss ψ es absoluta M, N, según Σ.

Observemos que, teniendo las hipótesis anteriores, tenemos el derecho de hablar de F^M y de F^N. Con lo que resulta que
F es absoluta M, N, según Σ, syss $F(x_1, \ldots, x_n) = y$ es absoluta M, N, según Σ.

Ahora bien, si $\Sigma \vdash M \subseteq N$, entonces

F es absoluta M, N, según Σ

syss $\Sigma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n, y \in M \left[F^M(x_1, \ldots, x_n) = y \leftrightarrow F^N(x_1, \ldots, x_n) = y \right]$

syss $\Sigma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \in M \left[F^M(x_1, \ldots, x_n) = F^N(x_1, \ldots, x_n) \right]$

syss $\Sigma \vdash F^M = F^N \restriction M^n$