Propiedades sobre Absolutez

Proposición$_1$. Sean M una clase y $\Sigma = \mathbf{Z}^- \setminus \{\mathbf{ZF}_5, \mathbf{ZF}_7\}$. Supongamos que $\Sigma \vdash \Sigma^M$ y que $\Sigma \vdash M$ es transitiva. Las siguientes relacionales, funcionales y constantes son absolutas para M, según Σ. De hecho para cada una de ellas hay una fórmula equivalente a una Δ_0.

a). $x \in y$
b). $x \in y$
c). $x \subseteq y$
d). $\{x, y\}$
e). $\{x\}$
f). $\langle x, y\rangle$
g). $\emptyset$
h). $x \cup y$
i). $x \cap y$
j). $x \setminus y$
k). x^+
l). x es transitivo
m). $\bigcup x$
n). $\bigcap x$ s.q. $x \neq \emptyset$

Prueba:
d). $\{x, y\} = z \leftrightarrow \left[x \in z \ \& \ y \in z \ \& \ \forall w\left(w \in z \rightarrow w = x \vee w = y\right)\right]$
e). $\{x\} = z \leftrightarrow \left[x \in z \ \& \ \forall w\left(w \in z \rightarrow w = x\right)\right]$

†

Proposición$_2$. Las nociones absolutas son cerradas bajo composición.
Sean M y N clases, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\in$–fórmula y sean $F(x_1, \ldots, x_n)$ y $G_i(y_1, \ldots, y_m)$ (con $i \in \{1, \ldots, n\}$) funcionales, según Σ. Si φ, F y G son absolutas M, N, según Σ, entonces también lo son,
a). La $\in$–fórmula $\varphi\left(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m)\right)$, y
b). La funcional $F\left(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m)\right)$

Prueba: Para el caso $n = m = 1$, Si $y \in M$, entonces

$$(\varphi(G(y)))^M \leftrightarrow \varphi^M(G^M(y)) \leftrightarrow \varphi^N(G^N(y)) \leftrightarrow (\varphi(G(y)))^N$$

y análogamente tenemos,

$$(F(G(y)))^M = F^M(G^M(y)) = F^N(G^N(y)) = (F(G(y)))^N$$

†

Por ejemplo, en la **Proposición$_1$**.
f). $\langle x, y\rangle = \{\{x,y\}, \{x\}\}$ es absoluta para M, según Σ, pues

$$\langle x, y\rangle = F\left(G_1(x,y), G_2(x,y)\right)$$

donde $F(x,y) = G_1(x,y) = \{x,y\}$ y $G_2(x,y) = \{x\}$ las cuales son absolutas para M, según Σ.

Proposición$_3$. Sean M una clase y $\Sigma = \mathbf{ZF}^- \setminus \{\mathbf{ZF}_5, \mathbf{ZF}_7\}$. Supongamos que $\Sigma \vdash \Sigma^M$ y que $\Sigma \vdash M$ es transitiva. Las siguientes relacionales y funcionales son absolutas para M, según Σ.

a).	z es un par ordenado	**e**).	$IMG(r)$
b).	$a \times b$	**f**).	r es función
c).	r es una relación	**g**).	$r(x)$
d).	$DOM(r)$	**h**).	r es una función 1 a 1

Prueba: **a**). Tenemos que

$$z \text{ es un par ordenado} \leftrightarrow \exists x \in \bigcup z\, \exists y \in \bigcup z \left[z = \left\langle x,\, z \right\rangle \right]$$

y ahora usando la proposición anterior, para $G_1(z) = G_2(z) = \bigcup z$ y $G_3(z) = z$ y tomando $\varphi\left(u,\, v,\, w\right)$ como

$$\exists x \in u\, \exists y \in v \left[w = \left\langle x,\, z \right\rangle \right]$$

Tenemos que,

$$z \text{ es un par ordenado} \leftrightarrow \varphi\left(G_1(z),\, G_2(z),\, G_3(z)\right)$$

Los demás se dejan al lector. †

Lema$_4$. Sean M una clase y $\Sigma = \mathbf{ZF}^- \setminus \{\mathbf{ZF}_5, \mathbf{ZF}_7\}$. Supongamos que $\Sigma \vdash \Sigma^M$ y que $\Sigma \vdash M$ es transitiva. Así,

si $\Sigma \vdash \omega \in M$, entonces $\Sigma \vdash \mathbf{ZF}_7^M$

Prueba: En Σ, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{ZF}_7^M &\Leftrightarrow \left[\exists x\Big(\emptyset \in x \;\&\; \forall y(y \in x \to y^+ \in x) \Big) \right]^M \\
&= \exists x \in M \left[\emptyset^M \in x \;\&\; \forall y \in M\Big(y \in x \to y^{+^M} \in x \Big) \right] \\
&\leftrightarrow \exists x \in M \left[\emptyset \in x \;\&\; \forall y\Big(y \in x \to y^+ \in x \Big) \right] \qquad \emptyset^M = \emptyset \text{ y } _^{+^M} = _^+ \\
&\leftrightarrow \exists x \in M \left[x \text{ es inductivo} \right]
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $\omega \in M$, tenemos que $\mathbf{ZF}_7^M$. †

Lema$_5$($\mathbf{ZF}^-$). Supongamos que M un modelo transitivo de $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{ZF}_5 - \mathbf{ZF}_7$. Sean $a,\, r \in M$ tales que r bien ordena a a. Así, (r bien ordena a a)^M.

Prueba: Por lo visto antes, tenemos que (r ordena totalmente a a)^M, de hecho es absoluta para M. Solo nos fataría ver que $\left[\forall x\, \varphi\left(x,\, a,\, r\right) \right]^M$, donde $\varphi\left(x,\, a,\, r\right)$ es la fórmula,

$$x \subseteq a \;\&\; x \neq \emptyset \to \exists y \in x \forall z \in x\left(\left\langle z,\, y \right\rangle \notin r \right)$$

Ahora bien, por lo visto antes, la fórmula φ es absoluta para M; esto nos reduce a solo probar que $\forall x \in M\, \varphi\left(x,\, a,\, r\right)$. Pero esto es inmediato de nuestra hipótesis, que lo que afirma es que $\forall x\, \varphi(x, a, r)$. †

Proposición₆(ZF⁻). R_ω es un modelo (transitivo) de **ZFC** − **ZF**$_7$ + ¬ **ZF**$_7$. Es decir,

$$\mathbf{ZF}^- \vdash \left[\mathbf{ZFC} - \mathbf{ZF}_7 + \neg\, \mathbf{ZF}_7\right]^{R_\omega}$$

Prueba: Ya hemos probado que R_ω es modelo de **ZF** − **ZF**$_7$. Veamos los dos axiomas que faltan.
Si $a \in R_\omega \subseteq BF$ y a es un conjunto inductivo, entonces a tiene rango infinito. Por lo dicho en la prueba del **Lema**$_4$, tenemos que $\left[\neg\, \mathbf{ZF}_7\right]^{R_\omega}$.
Veamos ahora que $\mathbf{AE}^{R_\omega}$. Para esto hay que probar que

$$\forall a \in R_\omega\ \exists r \in R_\omega \left[r \text{ bien ordena a } a\right]^M$$

Si $a \in R_\omega$, entonces a es finito y por tanto hay un $r \subseteq a \times a$ tal, que r bien ordena a a, con $r \in R_\omega$. El resultado se sigue del lema anterior. †

Corolario₇.

$$CON(\mathbf{ZF}^-) \Rightarrow CON\left(\mathbf{ZFC} - \mathbf{ZF}_7 + \{\neg\, \mathbf{ZF}_7\}\right)$$

Para terminar esta sección, veamos qué más podemos decir de $BF = \bigcup_{\alpha \in OR} R_\alpha$.

Proposición₈(ZF⁻). La clase BF es un modelo (transitivo) de **ZF**.
Prueba: Hemos probado ya que BF es un modelo de **ZF** − **ZF**$_7$. Y el que sea modelo de **ZF**$_7$ se sigue inmediatamente del **Lema**$_4$. †

Corolario₉.

$$CON(\mathbf{ZF}^-) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF})$$

¿Qué ocurre con el **AE**? No se puede decir mucho, veamos.

Proposición₁₀(ZF⁻). Sea $a \in BF$. Así,

$$a \text{ es bien ordenable syss } (a \text{ es bien ordenable})^{BF}$$

Prueba: Sea pues $a \in BF$. Supongamos que a es bien ordenable y sea $r \subseteq a \times a$ tal que r bien ordene a a. Tenemos que $a \times a \in BF$ y también que $r \in BF$. Por el **Lema**$_5$, tenemos que $(r \text{ bien ordena a } a)^{BF}$ y de aquí que (a es bien ordenable)^{BF}. Ahora el regreso. Supongamos que (a es bien ordenable)^{BF}. Hay pues, un $r \in BF$ tal que $(r \text{ bien ordena a } a)^{BF}$. Entonces, como en la prueba del **Lema**$_5$, tenemos que r ordena totalmente a a, y teniendo que todo subconjunto de a perteneciente a BF tiene elemento r–minimal, tenemos que todo subconjunto lo tiene, ya que los subconjuntos de a siempre son elementos de BF. †

Corolario$_{11}$(**ZF**$^{-}$). Si **AE**, entonces $(\mathbf{AE})^{BF}$.

El Regreso no es cierto.

Corolario$_{12}$.

$$CON(\mathbf{ZFC}^{-}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZFC})$$