Universo Contructible

Definiendo Definibilidad

Aquí trabajaremos en $\Sigma =$ **ZF** (de hecho en **ZF** – **Ax**. **Pot**)

¿Qué entendemos por que un conjunto sea definible? Lo primero que se nos ocurre pensar es que dicho conjunto lo podemos describir por medio de propiedades, es decir por medio de una fórmula de nuestro lenguaje $(\mathcal{L}^1_\in)$. Hay un problema de entrada y es que no toda fórmula describe un conjunto, podría ser muy grande –una clase propia. Restrinjámoslo entonces a subconjuntos de un conjunto dado (tenemos de nuestro lado al axioma de comprensión). Por lo pronto pongamos que $Df(a)$ denota al conjunto de subconjuntos definibles de a.

Ahora bien, en tal caso, no podemos dejar que la fórmula que define al subconjunto sea arbitraria, los cuantificadores “hablarían” de posibles conjuntos que no estuvieran dentro de nuestro conjunto a, lo que podemos hacer ahora es restringir las fórmulas a fórmulas relativizadas a dicho conjunto. Las cosas irían así,

Sean $a \in V$ y $b \subseteq a$. Será b un conjunto **DEFINIBLE**, en a, con la notación $b \in Df(a)$, syss hay una $\varphi \in \mathcal{L}^1_\in$ tal que

$$b = \left\{ s \in a \ / \ \varphi^a(s) \right\}$$

Pensemos no solo en conjuntos de elementos de a, pensemos más en general, en relaciones de cualquier aridad, sobre a. Denotemos por lo pronto como $Df\left(a, n\right)$ a las relaciones de aridad n (con $n \in \omega$), que son definibles en a. Nos conviene que si $r \subseteq a^n$, pensarlo como $r \subseteq {}^n a$.

Nos gustaría pues, tener que $r \in Df\left(a, n\right)$ syss hay una $\varphi \in \mathcal{L}^n_\in$ tal, que

$$r = \left\{ s \in {}^n a \ / \ \varphi^a\left(s_0, \ldots, s_{n-1}\right) \right\}$$

Pero, ésta "definición", tal cual, ¡**NO** está dentro del Lenguaje de la Teoría de conjuntos! Nuestra teoría, la teoría de conjuntos de Zermelo-Frankel, está dentro de un Lenguaje Formal de primer órden, y no podemos cuantificar sobre fórmulas.

En aras de avanzar un poco más, podríamos preguntarnos ¿quién debería ser $Df\left(a, n\right)$ para que al menos se tenga el "regreso" del bicondicional? Es decir, qué tiene que cumplir $Df\left(a, n\right)$ para tener al menos como un esquema lo siguiente:

Para cada $\varphi\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right)$, una $\in$–fórmula cuyas variables libres se encuentran entre $x_0, \ldots, x_{n-1}$, se tiene que

$$\forall a \left[\left\{ s \in {}^{n}a \ / \ \varphi^{a}\left(s_0, \ldots, s_{n-1}\right) \right\} \in Df\left(a, n\right) \right]$$

se haría por inducción sobre la formación de fórmulas

1. $\left\{ \left\langle s_i, s_j \right\rangle \ / \ s_i \in s_j \right\} \in Df\left(a, n\right)$
2. $\left\{ \left\langle s_i, s_j \right\rangle \ / \ s_i = s_j \right\} \in Df\left(a, n\right)$
3. Si $r \in Df\left(a, n\right)$, entonces ${}^{n}a \setminus r \in Df\left(a, n\right)$
4. Si $r, s \in Df\left(a, n\right)$, entonces $r \cap s \in Df\left(a, n\right)$ y
5. $\ldots$

Definición₁. Sean a un conjunto, $n \in \omega$ e $i, j < n$.

a). $Diag_{\in}(a, n, i, j) = \{s \in {}^{n}a \ / \ s_i \in s_j\}$

b). $Diag_{=}(a, n, i, j) = \{s \in {}^{n}a \ / \ s_i = s_j\}$

c). $Proy(a, r, n) = \{s \in {}^{n}a \ / \ \exists t \in r \, (\, t \restriction n = s \,)\}$

Así, $Diag_{\in}$, $Diag_{=}$ y $Proy$ son funcionales que toman como valor un subconjunto de ${}^{n}a$, es decir una relación n–área sobre a.

Definición₂. Sean a un conjunto.

1. Definimos $\forall n \in \omega \, Df'(k, a, n)$ por recursión, sobre k, como sigue:

a.
$$\begin{aligned}\forall n \in \omega \, Df'(0, a, n) \; &= \; \{Diag_{\in}(a, n, i, j) \ / \ i, j < n\} \cup \\ &\cup \; \{Diag_{=}(a, n, i, j) \ / \ i, j < n\}\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}\forall n \in \omega \, Df'(k+1, a, n) \; &= \; Df'(k, a, n) \cup \\ &\cup \; \{r \cap s \ / \ r, s \in Df'(k, a, n)\} \\ &\cup \; \{{}^{n}a \setminus r \ / \ r \in Df'(k, a, n)\} \\ &\cup \; \{Proy(a, r, n) \ / \ r \in Df'(k, a, m) \ \& \ m \geq n\}\end{aligned}$$

2. Para cada $n \in \omega$, sea $Df(a, n) = \bigcup_{k \in \omega} Df'(k, a, n)$

OjO: Para un $n \in \omega$, se tiene que,

- Si $r, s \in Df(a, n)$, entonces ${}^{n}a \setminus r, \ r \cap s \in Df(a, n)$. Y
- Si $r \in Df(a, m)$ con $m \geq n$, entonces $Proy(a, r, n) \in Df(a, n)$.

Veamos cómo recuperamos parte de lo discutido anteriormente. La siguiente proposición es un Esquema de teorema.

Proposición₁(Esquema). Para toda $\in$–fórmula φ, si sus variables libres se encuentran entre $v_0, \dots, v_{n-1}$, lo cual denotaremos por $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$, se tiene que

$$\forall a \left[\{s \in {}^{n}a \ / \ \varphi^{a}(s_0, \dots, s_{n-1})\} \in Df(a, n) \right] \text{ ....} (*)$$

Prueba: Se hará por inducción sobre la complejidad de las fórmulas, $\theta(\varphi)$. Sea pues, φ una $\in$–fórmula arbitraria. Probemos que φ tiene la propiedad $(*)$, bajo la suposición

–Hipótesis Inductiva– de que toda fórmula de complejidad menor a $\theta(\varphi)$ la tiene. Tenemos 5 casos posibles.

I. $\varphi \leftrightharpoons (v_i \in v_j)\big(v_0, \ldots, v_{n-1}\big)$. La fórmula φ tiene la propiedad $(*)$ pues, $Diag_{\in}\big(a, n, i, j\big) \in Df\big(a, n\big)$.

II. $\varphi \leftrightharpoons (v_i = v_j)\big(v_0, \ldots, v_{n-1}\big)$. La fórmula φ tiene la propiedad $(*)$ pues, $Diag_{=}\big(a, n, i, j\big) \in Df\big(a, n\big)$.

Obsérvese que **i**) y **ii**) son ciertas para toda $n \in \omega$, con tal de que $n \geq max\{i,j\}$.

III. $\varphi \leftrightharpoons (\psi \ \& \ \chi)\big(v_0, \ldots, v_{n-1}\big)$. La fórmula φ tiene la propiedad $(*)$ pues, $Df\big(a, n\big)$ es cerrada bajo intersecciones.

IV. $\varphi \leftrightharpoons (\neg\varphi)\big(v_0, \ldots, v_{n-1}\big)$. La fórmula φ tiene la propiedad $(*)$ pues, $Df\big(a, n\big)$ es cerrada bajo complementos.

V. $\varphi \leftrightharpoons \big(\exists v_m\, \psi\big)\big(v_0, \ldots, v_{n-1}\big)$. Si la variable v_m no ocurre libre en ψ, no hay nada que hacer. Si v_m ocurre libre en ψ, tenemos dos casos posibles, v_m es alguna de las variables $v_0, \ldots, v_{n-1}$ o nó.

Supongamos en primer lugar que $v_m \notin \big\{v_0, \ldots, v_{n-1}\big\}$. Así $\varphi \leftrightharpoons \big(\exists v_m\, \psi\big)$, con $m \geq n$ y $\psi\big(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_m \big)$, con v_m libre en ψ. Tenemos que

$$\Big\{s \in {}^{n}a \ / \ \big(\exists v_m\, \psi\big)^a\big(s_0, \ldots, s_{n-1}\big)\Big\} =$$

$$= \Big\{s \in {}^{n}a \ / \ \big(\exists v_m\, \psi\big(s_0, \ldots, s_{n-1}, v_n, \ldots, v_m \big)\big)^a\Big\}$$

$$= \Big\{s \in {}^{n}a \ / \ \exists v_m \in a\, \psi^a\big(s_0, \ldots, s_{n-1}, v_n, \ldots, v_m \big)\Big\}$$

$$\overset{(1)}{=} Proy\Big(a, \Big\{t \in {}^{m+1}a \ / \ \psi^a\big(t_0, \ldots, t_{n-1}, t_n, \ldots, t_m \big)\Big\}, n\Big)$$

(1) Veamos la doble contención.

$\subseteq\big]$ Supongamos que $s \in {}^{n}a$ y $a_0 \in a$, con la propiedad de que $\psi^a\big(s_0, \ldots, s_{n-1}, v_n, \ldots, v_{m-1}, a_0\big)$. Sea $t = s^\frown a_0{}^\frown a_0{}^\frown \ldots {}^\frown a_0$. Así, $t \in {}^{m+1}a$ y es tal que $t \restriction n = s$ y $\psi^a\big(t_0, \ldots, t_{n-1}, t_n, \ldots, t_m \big)$.

$\supseteq\big]$ Sea $s \in {}^{n}a$ tal que $s = t \restriction n$ para un $t \in {}^{m+1}a$ con la propiedad de que $\psi^a\big(t_0, \ldots, t_{n-1}, t_n, \ldots, t_m \big)$. Así, $\psi^a\big(s_0, \ldots, s_{n-1}, t_n, \ldots, t_m \big)$. Por lo tanto, hay un elemento v_m de a (a saber t_m) tal que $\psi^a\big(s_0, \ldots, s_{n-1}, v_n, \ldots, v_m \big)$.

Ahora bien, puesto que $\theta(\psi) < n$, por Hipótesis Inductiva tenemos que, $\Big\{t \in {}^{m+1}a \ / \ \psi^a\big(t_0, \ldots, t_m \big)\Big\} \in Df\big(a, m+1\big)$, por tanto

$$Proy\Big(a, \Big\{t \in {}^{m+1}a \ / \ \psi^a\big(t_0, \ldots, t_m \big)\Big\}, n\Big) \in Df\big(a, n\big)$$

y de aquí lo que queríamos.

Veamos ahora el caso en que $v_m \in \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Aquí $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ y v_m ocurre libre en ψ. Consideremos a la fórmula ψ', la cual se obtiene a partir de ψ al sustituir todas las ocurrencias de la variable v_m por la variable v_p, donde p es el primer natural tal que $p \geq n$ y v_p no ocurre en ψ. Con esto tenemos que $\exists v_m\, \psi$ es lógicamente equivalente a la fórmula $\exists v_p\, \psi'$, cuyas variables libres se encuentran entre $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Con esto queremos decir que,

$$\left\{s \in {}^n a \;/\; \left(\exists v_m\, \psi\right)^a\left(s_0, \ldots, s_{n-1}\right)\right\} = \left\{s \in {}^n a \;/\; \left(\exists v_p\, \psi\right)^a\left(s_0, \ldots, s_{n-1}\right)\right\}$$

Al tener que $v_p \notin \{0, \ldots, n-1\}$ hemos reducido este caso, al caso anterior. †

OjO: El inverso del esquema de teorema anterior no se puede justificar rigurosamente en **ZF**, solo intuitivamente, "todo elemento de $Df\left(a, n\right)$ está definido por una fórmula".

"**Prueba**": Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de $\mathcal{L}_\in$ cuyas variables libres se encuentran entre $v_0, \ldots, v_{n-1}$. Es verdad que

$$\dot\forall\, a \;\; \dot\forall\, b \in Df\left(a, n\right) \bigvee_{i \in \omega} \left[b = \left\{s \in {}^n a \;/\; \varphi_i^a\left(s_0, \ldots, s_{n-1}\right)\right\}\right]$$

y esto se puede ver haciendo una inducción sobre k en nuestra definición,

$$Df\left(a, n\right) = \bigcup_{k \in \omega} Df'\left(k, a, n\right)$$

Así, intuitivamente, tenemos

$$Df\left(a, n\right) = \left\{\left\{s \in {}^n a \;/\; \varphi^a\left(s_0, \ldots, s_{n-1}\right)\right\} \;/\; \varphi \in \mathcal{L}_\in^{\leq n}\right\}$$

Otra observación importante es que para cada conjunto a y $n \in \omega$ se tiene,

$$\left|\, Df\left(a, n\right) \,\right| \leq \aleph_0$$

pues $Df\left(a, n\right)$ es la cerradura de un conjunto contable bajo un conjunto finito (tres) de operaciones.

Proposición₂. Sea M una clase tal que **ZF** $\vdash M$ es transitiva y **ZF** $\vdash \left(\textbf{ZF} - \textbf{Pot}\right)^M$. Entonces $Df\left(a, n\right)$ es absoluta para M, según **ZF**.

Prueba: Las funcionales $Diag_\in$ y $Diag_=$ son absolutas para M, según **ZF**. También lo son el complemento, la intersección y $Proy$. Con esto tenemos que $Df'\left(k, a, n\right)$ está definida recursivamente con funciones absolutas, ella misma es absoluta. Finalmente, $Df\left(a, n\right)$ es absoluta para M, según **ZF**. †

Pasemos ahora a definir la operación *conjunto potencia definible, $\mathcal{D}$*.

Intuitivamente, $\mathcal{D}(a)$ es el conjunto de subconjuntos de a que son definibles a partir de un número finito de elementos de a por una fórmula relativizada a a. Formalmente damos la siguiente

Definición$_3$.

$$\mathcal{D}(a) = \left\{ x \subseteq a \ / \ \exists n \in \omega \, \exists s \in {}^{n}a \, \exists r \in Df\left(a,\ n+1\right)\left[x = \left\{ a_0 \in a \ / \ s^\wedge a_0 \in r \right\} \right] \right\}$$

Proposición$_3$(Esquema). Si φ es una $\in$–fórmula, cuyas variables libres son exáctamente $v_0,\ \ldots\ ,\ v_{n-1},\ v_n,$ entonces

$$\forall a \, \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in a \left[\left\{ v_n \in a \ / \ \varphi^a\left(v_0,\ \ldots\ ,\ v_{n-1},\ v_n\right) \right\} \in \mathcal{D}(a) \right]$$

Prueba: Consideremos a $\varphi\left(v_0,\ \ldots\ ,\ v_{n-1},\ v_n\right)$ y a un conjunto cualquiera. Sea

$$r = \left\{ s \in {}^{n+1}a \ / \ \varphi^a\left(s_0,\ \ldots\ ,\ s_{n-1},\ s_n\right) \right\}$$

por la **Proposición$_1$**, tenemos que $r \in Df\left(a,\ n+1\right)$. Para finalizar, sean $a_0,$ $\ldots,\ a_{n-1} \in a,$ tenemos que

$$\left\{ v_n \in a \ / \ \varphi^a\left(a_0,\ \ldots\ ,\ a_{n-1},\ v_n\right) \right\} = \left\{ a_0 \in a \ / \ \left\langle a_0,\ \ldots\ ,\ a_{n-1} \right\rangle^\wedge a_0 \in r \right\} \qquad \dagger$$