Los conjuntos Constructibles.

Recordemos,

Definición$_3$. El conjunto de los subconjuntos definibles del conjunto a.

$$\mathcal{D}(a) = \Big\{x \subseteq a \;/\; \exists n \in \omega\, \exists s \in {}^{n}a\, \exists r \in Df\big(a,\, n+1\big)\Big[x = \Big\{y \in a \;/\; s^\frown y \in r\Big\}\Big]\Big\}$$

OjO:

1. Si $a \in V$, entonces por el Axioma de Comprensión, $\mathcal{D}(a) \in V$.
2. $\mathcal{D}(a) \subseteq \wp(a)$.

Proposición$_3$(Esquema). Si φ es una $\in$–fórmula, cuyas variables libres son exáctamente $v_0,\ \dots\ ,\ v_{n-1},\ v_n$, entonces

$$\forall a\, \forall v_0, \dots, v_{n-1} \in a\Big[\Big\{v_n \in a \;/\; \varphi^a\big(v_0,\ \dots\ ,\ v_{n-1},\ v_n\big)\Big\} \in \mathcal{D}(a)\Big]$$

Proposición$_4$.
i). $\emptyset \in \mathcal{D}(a)$, para cualquier conjunto a.
ii). $\mathcal{D}(\emptyset) = \{\ \emptyset\ \}$
Prueba: **Ejercicio**. †

Proposición$_5$. Los subconjuntos finitos de cualquier conjunto, son definibles en dicho conjunto.

Si $b \subseteq a$ y b es finito, entonces $b \in \mathcal{D}(a)$.

Prueba: Si $b = \emptyset$, ya lo tenemos. Supongamos que $\emptyset \neq b \subseteq a$ y que b es finito. Así, hay f y $n \in \omega \setminus \{0\}$ tales que $n+1 \underset{f}{\sim} b$. Por lo que $b = \{\ f(0), \dots, f(n)\ \}$. Sea

$$\varphi(v_0, \dots, v_n, v_{n+1}) \leftrightharpoons (v_{n+1} \approx v_0) \vee \dots \vee (v_{n+1} \approx v_n)$$

Finalmente, $b = \Big\{y \in a \;/\; \varphi^a\big(\ f(0), \dots, f(n), y\ \big)\Big\} \in \mathcal{D}(a)$. †

Corolario$_6$. Si a es finito, entonces $\wp(a) \subseteq \mathcal{D}(a)$ y por tanto $\mathcal{D}(a) = \wp(a)$. Además (sin **AE**), $\mid a \mid < \mid \mathcal{D}(a) \mid = 2^{|a|} < \aleph_0$.

Proposición$_7$(**AE**). Para cualquier $a \in V$,

1. $\mid a \mid \leq \mid \mathcal{D}(a) \mid$.
2. Si a es Infinito, entonces $\mid \mathcal{D}(a) \mid \leq \mid a \mid$.
3. Si a es Infinito, entonces $\mid \mathcal{D}(a) \mid = \mid a \mid$.

Prueba:

1. Si $b \in a$, entonces $\{b\} = \left\{ y \in a \ / \ y = b \right\} \in \mathcal{D}(a)$. Así, $a \precsim \mathcal{D}(a)$.

2. $\mid \mathcal{D}(a) \mid \leq \left| \bigcup_{n \in \omega} {}^{n}a \right| \cdot \aleph_0 \underset{a \in INF}{=} \mid a \mid \cdot \aleph_0 \underset{a \in INF}{=} \mid a \mid$. †

Proposición₈. Si a es un conjunto transitivo, entonces $a \subseteq \mathcal{D}(a)$.

Prueba: Sea a un conjunto transitivo y $b \in a$. Tenemos que,

$$b = \left\{ x \ / \ x \in b \right\} \underset{a \text{ transa}}{=} \left\{ x \in a \ / \ x \in b \right\}$$

Ahora bien, si consideramos la fórmula $v_1 \in v_0$; por la **Proposición₃** tenemos que

$$b = \left\{ v_1 \in a \ / \ (v_1 \in v_0)^a(b, v_1) \right\} \in \mathcal{D}(a)$$

†

Definición₄.

I. La funcional L queda definida recursivamente sobre OR como sigue:

i). $L_0 = \emptyset$

ii). $\forall \alpha \ L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$

iii). $\forall \alpha \in LIM, \ L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta$

II. $L = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha$.

Proposición₉.

1. $\forall \alpha \left[\ L_\alpha \subseteq R_\alpha \ \right]$.

2. $L \subseteq BF \left(\underset{\textbf{ABF}}{=} V \right)$

Prueba: Por indución sobre OR.

i). $L_0 = \emptyset = R_0$.

ii). $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha) \subseteq \wp(L_\alpha) \underset{\textbf{HI}}{\subseteq} \wp(R_\alpha) = R_{\alpha+1}$

iii). Para $\alpha \in LIM$, se tiene $L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta \underset{\textbf{HI}}{=} \bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta = R_\alpha$ †

Corolario₁₀.

1. $\forall n \in \omega, \ L_n = R_n$

2. $L_\omega = R_\omega$.

Proposición$_{11}$.

1. $\forall n \in \omega, \left| L_n \right| < \left| L_{n+1} \right| = 2^{\left| L_n \right|} < \aleph_0$
2. $\left| L_\omega \right| = \aleph_0$
3. $\forall \alpha \geq \omega \left| L_\alpha \right| = \left| L_{\alpha+1} \right|$

Proposición$_{12}$. Para cada $\alpha \in OR$,

1. L_α es transitivo.
2. L es transitivo.

Prueba: **2** es inmediato de **1**. Y éste se hará por inducción sobre OR, en su 2a. forma. Cuando $\alpha = 0$ y cuando $\alpha \in LIM$ es inmediato que es transitivo. Supogamos inductivamente que L_α es transitivo y probemos que $L_{\alpha+1}$ también lo es. Por la **Proposición$_8$** y de **OjO**, tenemos que $L_\alpha \subseteq \mathcal{D}(L_\alpha) \subseteq \wp(L_\alpha)$. Pero por definición, $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$. Por tanto,

$$L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1} \subseteq \wp(L_\alpha)$$

Y de aquí que L_α es transitivo. †

Proposición$_{13}$.

1. $\forall \xi \leq \alpha \ (L_\xi \subseteq L_\alpha)$.
2. $\forall \alpha \ (L_\alpha \in L_{\alpha+1})$.
3. $\forall \alpha, \beta \left(\alpha < \beta \rightarrow L_\alpha \in L_\beta \right)$.

Prueba: **1**. De la definición de L_α, basta probar $\forall \alpha \left[L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1} \right]$. Sabemos que L_α es transitivo y el resultado se sigue del razonamiento del anterior.

2. Si $\alpha \in OR$, tenemos

$$L_\alpha = \left\{ x \in L_\alpha \ / \ x = x \right\} = \left\{ v_0 \in L_\alpha \ / \ (v_0 = v_0)^{L_\alpha} \right\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$$

3. Si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha < \alpha + 1 \leq \beta$ y $L_\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq L_\beta$. †

De la definición de L tenemos que si $x \in L$, entonces el primer α tal que $x \in L_\alpha$ debe ser un ordinal sucesor.

Definición$_5$. Para cada $x \in L$, el *L–Rango de x*, queda definido como sigue,

$$\rho_L(x) = \bigcap \left\{ \beta \ / \ x \in L_{\beta+1} \right\}$$

OjO: $\rho_L : L \rightarrow OR$

Proposición$_{13}$. Para cada $\alpha \in OR$, se tiene que

$$L_\alpha = \left\{x \in L \;/\; \rho_L(x) < \alpha\right\}$$

Prueba: **TAREA**. †