Algunas propiedades de L

Lema$_{15}$. En **ZF** - **ZF$_5$** tenemos,

1. $ord(x) \leftrightarrow x$ es transitivo $\&$ x está ordenado totalmente por $\in$.
2. Hay una fórmula $\varphi(x)$ equivalente a una Δ_0 tal que $\varphi(x) \leftrightarrow ord(x)$.
3. $ord(x)$ es absoluta para cualquier modelo transitivo, según **ZF** - **ZF$_5$**

Prueba:

1. Inmediata del **ABF**.

2. x es transitivo $\leftrightarrow$ $\forall y \in x\, \forall z \in y\, (z \in x)$ (eq. a una Δ_0) y

x está ordenado totalmente por $\in$ $\leftrightarrow$

$\forall y \in x\, \forall z \in x\, \forall w \in x\, (y \in z \,\&\, z \in w \rightarrow y \in z) \,\&\, \forall y \in x\, \forall z \in x\, (y \in z \vee y = z \vee z \in y)$

(eq. a una Δ_0).

3. Inmediata de **2**. †

Así, si **ZF** - **ZF$_5$** $\vdash M$ es transitiva, entonces

i). **ZF** - **ZF$_5$** $\vdash \forall x \in M\, [ord^M(x) \leftrightarrow ord(x)]$

ii). **ZF** - **ZF$_5$** $\vdash OR^M = OR \cap M$.

Recordemos que aquí estamos trabajando en todo **ZF**.

Proposición$_{16}$.

1. $\forall x \in M \left[ord^L(x) \leftrightarrow ord(x) \right]$
2. $OR^L = OR \cap L$
3. $\forall \alpha \left[L_\alpha \cap OR = \alpha \right]$
4. $\forall \alpha \left[\alpha \in L_{\alpha+1} \;\&\; \rho_L(\alpha) = \alpha \right]$
5. $OR \subseteq L$ y, por tanto, $OR^L = OR$.

Prueba: Puesto que L es una clase transitiva, se tiene **1** y **2**. Veamos los otros.

3. Se hará por inducción sobre OR, en su 2a. forma.

i). $L_0 \cap OR = \emptyset \cap OR = 0$.

ii). Supongamos inductivamente que, $L_\alpha \cap OR = \alpha$ y probemos que

$$L_{\alpha^+} \cap OR = \alpha^+$$

Puesto que, $\alpha = L_\alpha \cap OR \subseteq L_{\alpha^+} \cap OR \subseteq R_{\alpha^+} \cap OR \subseteq \alpha^+$, bastaría probar que $\alpha \in L_{\alpha^+} \cap OR$, es decir $\alpha \in L_{\alpha^+}$. Tenemos

$$\alpha = L_\alpha \cap OR = \left\{x \in L_\alpha \ / \ ord(x)\right\} \underset{L_\alpha \text{ transa}}{=} \left\{v_0 \in L_\alpha \ / \ ord^{L_\alpha}(v_0)\right\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha^+}$$

iii). Supongamos $\alpha \in LIM.$ Así,

$$OR \cap L_\alpha = OR \cap \left(\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta\right) = \bigcup_{\beta<\alpha} (OR \cap L_\beta) \underset{\text{H.I.}}{=} \bigcup_{\beta<\alpha} \beta = \alpha$$

4. Se sigue de que $\alpha \in \alpha^+ = L_{\alpha^+} \cap OR.$ Y **5** es inmediato de **4**. †

Proposición$_{17}$(AE). $\forall \alpha \geq \omega, \ |\ L_\alpha \ | = |\ \alpha\ |.$

Prueba: Por inducción sobre $OR,$ en su 2a. forma. Tomemos en cuenta la **Proposición$_{11}$** anterior.

i). $|\ L_\omega\ | = \aleph_0 = |\ \omega\ |$

ii). $|\ L_{\alpha^+}\ | = |\ L_\alpha\ | \underset{\text{H.I.}}{=} |\ \alpha\ | = |\ \alpha^+\ |$

iii). Supongamos que $\alpha \in LIM.$ Puesto que $\alpha = L_\alpha \cap OR \subseteq L_\alpha,$ tenemos que $|\ \alpha\ | \leq |\ L_\alpha\ |.$ Veamos el otro lado.

$$|\ L_\alpha\ | = \left|\ \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta\ \right| = \left|\ L_\omega \cup \bigcup_{\omega\leq\beta<\alpha} L_\beta\ \right| \leq \aleph_0 + \sum_{\omega\leq\beta<\alpha} |\ L_\beta\ | \underset{\text{H.I.}}{=}$$

$$= \aleph_0 + \sum_{\omega\leq\beta<\alpha} |\ \beta\ | = \aleph_0 + |\ \alpha\ | \cdot \underset{\omega\leq\beta<\alpha}{Sup} |\ \beta\ | = |\ \alpha\ |$$

†

TAREA: $|\ L_\alpha\ | = |\ R_\alpha\ |$ syss $\alpha = \beth_\alpha$

Proposición$_{18}$. La funcional L_α es absoluta para modelos transitivos de **ZF** - **ZF$_5$**, según **ZF**.

Prueba: Sabemos que $Df(a,n)$ es absoluta y como $\mathcal{D}$ se puede expresar por composición a partir de $Df(a,n),$ tenemos que $\mathcal{D}$ es absoluta. Finalmente, L_α está definida por recursión tranfinita a partir de absolutas ($\emptyset$, $\mathcal{D}$ y $\cup$). †