ZF en L

Aquí estaremos trabajando en **ZF** y probaremos que todos los axiomas de **ZF** son verdaderos en L.

Proposición. L es modelo de **ZF**.

Prueba:

1. $(\mathbf{ZF_1})^L$: (**Ax. Extensionalidad**)^L.
   Es inmediato de que L es una clase transitiva.

2. $(\mathbf{ABF})^L$: (**Ax. de Regularidad**)^L.
   Este axioma es verdadero en cualquier clase $M \subseteq BF$ y aquí tenemos que $L \subseteq V = BF$.

3. $(\mathbf{ZF_2})^L$: (**Ax. del conjunto vacío**)^L.
   Pues se tiene que $\emptyset = L_0 \in L_1 \subseteq L$.

4. $(\mathbf{ZF_7})^L$: (**Ax. de Infinito**)^L.
   Pues L es una modelo transitivo y $\omega \in OR = OR^L \subseteq L$. Además $\omega^L = \omega$.

5. $(\mathbf{ZF_3})^L$: (**Ax. del Par**)^L.
   Sean $a, b \in L$. Puesto que L es transitivo, basta ver que $\{a, b\} \in L$. Hay pues, un ordinal α tal que $a, b \in L_\alpha$. Puesto que $\{a, b\}$ es un subconjunto finito de L_α, tenemos que $\{a, b\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha^+} \subseteq L$. Así, $\{a, b\}^L = \{a, b\}$.

6. $(\mathbf{ZF_4})^L$: (**Ax. de la Unión**)^L.
   Como en el caso anterior, basta ver que $\forall x \in L,\ \cup x \in L$. Sea pues $a \in L$. Hay un ordinal α tal que $a \subseteq L_\alpha$. Como L_α es transitivo, entonces $\cup a \subseteq L_\alpha$. Así,

$$\cup a = \{x \in L_\alpha \ /\ \exists y\,(y \in a \ \&\ x \in y)\} \underset{\Delta_0}{=}$$
$$\underset{L_\alpha \text{ transa}}{=} \{v_1 \in L_\alpha \ /\ \left(\exists v_2\,(v_2 \in v_0 \ \&\ v_1 \in v_2)\right)^{L_\alpha}(a, v_1)\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha^+} \subseteq L$$

7. $(\mathbf{ZF_5})^L$: (**Ax. de Potencia**)^L.
   Sea $a \in L$. Veamos que $\wp(a) \cap L \in L$. Sea $b = \{x \in L \ /\ x \subseteq a\}$. Ahora bien, para cada $x \in b$, sea $\alpha_x = \rho_L(x) + 1$ (así, $x \in L_{\alpha_x}$) y sea

$$\alpha = \bigcup\{\alpha_x \ /\ x \in b\}$$

   ($\alpha \in V$ por el esquema de comprensión y el axioma de la unión). Así tenemos que para cada $x \in b$, se tiene $x \in L_\alpha$. Por lo que,

$$b = \Big\{x \in L_\alpha \ / \ x \subseteq a\Big\} = \Big\{v_1 \in L_\alpha \ / \ (v_1 \subseteq v_0)^{L_\alpha}(a, v_1)\Big\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha^+} \subseteq L$$

8. $\left(\mathbf{ZF_6}\right)^L$: $\left(\textbf{Esq. Ax. de Comprensión}\right)^L$

Recordemos que para tener que $\left(\mathbf{ZF_6}\right)^L$ es suficiente con tener que para cada $\in$–fórmula $\varphi(w, w_1, \ldots, w_n)$ con todas sus variables libres como se muestran, se tiene que

$$\forall x, w_1, \ldots, w_n \in L \Big[\ \Big\{w \in x \ / \ \varphi^L(w, w_1, \ldots, w_n)\Big\} \in L \ \Big]$$

Puesto que nuestra definición de $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$ y la definición de $D(L_\alpha)$ involucra la relativización a L_α y no a L, tendremos que usar una herramienta adicional, los Teoremas de Reflexión. **PENDIENTE**.

9. $\left(\mathbf{ZF_8}\right)^L$: $\left(\textbf{Esq. Ax. de Sustitución}\right)^L$

Para probar que $\left(\mathbf{ZF_8}\right)^L$, puesto que ya tenemos que $\left(\mathbf{ZF_6}\right)^L$, es suficiente con mostrar que para cada $\in$–fórmula $\varphi(x, y, a, w_1, \ldots, w_n)$ con todas sus variables libres como se muestran y cada $a, w_1, \ldots, w_n \in L$, si se tiene que

$$\forall x \in a \ \exists! y \in L \ \varphi^L(x, y, a, w_1, \ldots, w_n) \tag{$*$}$$

hay que concluir que

$$\exists b \in L \Big[\Big\{y \ / \ \exists x \in a \ \varphi^L(x, y, a, w_1, \ldots, w_n)\Big\} \subseteq b\Big]$$

Supongamos pues $(*)$ y sea

$$\alpha = \bigcup\Big\{\rho_L(y) + 1 \ / \ \exists x \in a \ \varphi^L(x, y, a, w_1, \ldots, w_n)\Big\}$$

($\alpha \in V$ por Ax. Unión y Sustitución). Sea $b = L_\alpha$. Tenemos que $b = L_\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq L$ es decir $b \in L$ y además,

$$\Big\{y \ / \ \exists x \in a \ \varphi^L(x, y, a, w_1, \ldots, w_n)\Big\} \subseteq b \qquad \dagger$$