Teoremas de Reflexión

Aquí estaremos trabajando en **ZF**$^-$.

Notación. De ahora en adelante, salvo que se diga otra cosa si escribimos $\varphi(y_1,\dots,y_n)$ quiere decir que las variables líbres de la $\in$–fórmula φ son exactamente $y_1,\dots,y_n$. En algunas ocasiones escribiremos $\vec{y}$ en lugar de $y_1,\dots,y_n$.

Definición. Una lista finita de $\in$–fórmulas es *Cerrada bajo Subfórmulas* syss toda subfórmula de una fórmula de la lista está en la lista (y ninguna de la lista usa el cuantificador universal, $\forall$).

OjO: Dada una lista finita de $\in$–fórmulas se puede acompletar para formar una cerrada bajo subfórmulas. En el caso en que en alguna fórmula aparezca un $\forall$, cambiarlo por $\neg\exists\neg$ y obtener una lógicamente equivalente.

Lema$_1$ (**Test de Vaught–Tarski**).

Sean M y N clases, con $\emptyset \neq M \subseteq N$ y sean $\varphi_1,\dots,\varphi_l$ una lista de $\in$–fórmulas cerradas bajo subfórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones,

(**a**) $\varphi_1,\dots,\varphi_l$ son absolutas M, N

(**b**) Cada vez que φ_i sea de la forma $\exists x\ \varphi_j(x,y_1,\dots,y_n)$, se tiene que

$$\forall y_1,\dots,y_n \in M\left[\exists x \in N\ \varphi_j^N(x,y_1,\dots,y_n) \ \rightarrow\ \exists x \in M\ \varphi_j^N(x,y_1,\dots,y_n)\right]$$

Prueba: Probaremos ambas implicaciones en forma directa.

(**a**) $\Rightarrow$ (**b**)$\big]$ Supongamos que $\varphi_i(y_1,\dots,y_n) \leftrightharpoons \exists x\ \varphi_j(x,y_1,\dots,y_n)$. Ahora, fijemos $y_1,\dots,y_n \in M$ y supongamos que $\exists x \in N\ \varphi_j^N(x,y_1,\dots,y_n)$, es decir que $\varphi_i^N(y_1,\dots,y_n)$. Por (**a**), tenemos que $\varphi_i(y_1,\dots,y_n)$ es absoluta M, N y de aquí obtenemos que $\varphi_i^M(y_1,\dots,y_n)$, es decir,

$$\exists x \in M\ \varphi_j^M(x,y_1,\dots,y_n) \quad\dots\dots\dots\dots (*)$$

Por otro lado, también por (**a**), tenemos que $\varphi_j(x,y_1,\dots y_n)$ es absoluta M, N, es decir,

$$\forall x \in M\left[\varphi_j^M(x,y_1,\dots y_n) \ \leftrightarrow\ \varphi_j^N(x,y_1,\dots,y_n)\right]$$

De esto último y de $(*)$, concluimos que $\exists x \in M\ \varphi_j^N(x,y_1,\dots y_n)$.

(**b**) $\Rightarrow$ (**a**)$\big]$ Probaremos algo más general, que toda fórmula tiene la propiedad: para toda φ, si φ cumple (**b**), entonces φ es absoluta M, N. Y esto se hará por Inducción sobre la formación de $\in$–fórmulas.

La base de la inducción, para atómicas, es trivial, son absolutas M, N y en el paso inductivo los casos de los conectivos $\&$ y $\neg$ son inmediados de la hipótesis inductiva. Veamos el caso de la cuantificación existencial.

Supongamos inductivamente que $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ es absoluta M, N y probemos que $\exists x \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ también lo es. Fijemos $y_1, \ldots, y_n \in M$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\exists x \varphi\left(x, \vec{y}\right)\right)^M &\leftrightarrow \exists x \in M\, \varphi^M\left(x, \vec{y}\right) && \text{Def.}\\
&\leftrightarrow \exists x \in M\, \varphi^N\left(x, \vec{y}\right) && \textbf{H.I.}\\
&\leftrightarrow \exists x \in N\, \varphi^N\left(x, \vec{y}\right) && \to)\ M \subseteq N;\ \leftarrow)\ (\mathbf{b})\\
&\leftrightarrow \left(\exists x \varphi\left(x, \vec{y}\right)\right)^N && \text{Def.}
\end{aligned}$$

†

Proposición$_2$. Teorema de Reflexión.

Sean Z una clase no–vacía y $Z\_ : OR \to V$ (por lo que, $\alpha \mapsto Z_\alpha \in V$) tales que,

i). $\alpha < \beta \to Z_\alpha \subseteq Z_\beta$.

ii). $\beta \in LIM \to Z_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} Z_\alpha$.

iii). $Z = \bigcup_{\alpha \in OR} Z_\alpha$.

Así, para cualesquiera $\in$–fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, se tiene que

$$\forall \alpha\, \exists \beta > \alpha \left[\ \beta \in LIM \ \&\ Z_\beta \neq \emptyset \ \&\ \varphi_1, \ldots, \varphi_l \text{ son absolutas } Z_\beta,\ Z\ \right]$$

Algunos comentarios son necesarios.

1. Se pide que Z sea una clase no–vacía, pero no que sea una clase propia. Si $Z \in V$, entonces $Z = Z_\xi$, para un ξ lo suficientemente grande y el resultado es trivial.

2. No se está exigiendo que para todo α, $Z_\alpha \neq \emptyset$ ya que para algún ξ, lo suficientemente grande, se tiene que todo $\alpha > \xi$, $Z_\alpha \neq \emptyset$.

3. Para la prueba usaremos el Test de Vaught–Tarski donde $N = Z$ y encontraremos un ordinal β tal que $M = Z_\beta$ el cual cumpla (**b**). Es decir, un $\beta > \alpha$ tal que Z_β sea cerrado bajo los existenciales de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$.

Prueba: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ es una lista cerrada bajo subfórmulas.

Para cada fórmula $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ de la forma $\exists x\ \psi(x, y_1, \dots, y_n)$, definimos la funcional G_φ como sigue,

$$G_\varphi : Z^n \to OR$$

$$\forall \vec{y} \in Z^n,\ G_\varphi\left(\vec{y}\right) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \neg\varphi^Z\left(\vec{y}\right) \\ \bigcap\left\{\eta\left(\vec{y}\right) \in OR \ / \ \exists x \in Z_\eta\ \psi^Z\left(x, \vec{y}\right)\right\} & \text{Si } \varphi^Z\left(\vec{y}\right) \end{cases}$$

Observemos que si $\vec{y} \in Z^n$ es tal que $\varphi^Z\left(\vec{y}\right)$, entonces hay un $x \in Z_{G_\varphi\left(\vec{y}\right)}$ tal que $\psi^Z\left(x, \vec{y}\right)$.

Ahora, para cada fórmula $\varphi(y_1, \dots, y_n)$, definimos la funcional F_φ de la siguiente manera,

$$F_\varphi : OR \to OR$$

$$\forall \xi,\ F_\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \varphi\left(\vec{y}\right) \text{ no es existencial} \\ \bigcup\left\{G_\varphi\left(\vec{y}\right) \ / \ \vec{y} \in Z_\xi^n\right\} & \text{Si } \varphi\left(\vec{y}\right) \text{ es existencial} \end{cases}$$

OjO:

(**1**) La funcional F_φ está bien definida gracias al Axioma de Sustitución $-G_{\varphi_i}[Z_\xi^n] \in V$.

(**2**) El conjunto $Z_{F_\varphi(\xi)}$ es cerrado bajo testigos, de un existencial φ^Z, con parámetros en Z_ξ.

(**3**) $\xi_1 < \xi_2 \to F_\varphi(\xi_1) \leq F_\varphi(\xi_2)$. Pues $Z_{\xi_1} \subseteq Z_{\xi_2}$.

Afirmación. Para cualquier $\in$–fórmula, si $\beta \in LIM$ tal que $\forall \xi < \beta \left[F_\varphi(\xi) < \beta\right]$, entonces φ es absoluta Z_β, Z.

Aquí es donde usaremos el Test de Vaught–Tarski. Supongamos pues, que φ es un existencial, digamos $\exists x\ \psi(x, y_1, \dots, y_n)$. Fijemos $y_1, \dots, y_n \in Z_\beta$ y supongamos que $\exists x \in Z\ \psi^Z(x, y_1, \dots, y_n)$, demostremos que $\exists x \in Z_\beta\ \psi^Z(x, y_1, \dots, y_n)$. Puesto que $\beta \in LIM$ hay un $\xi_0 < \beta$ tal que $y_1, \dots, y_n \in Z_{\xi_0} \subseteq Z_\beta$, pero entonces $G_\varphi(y_1, \dots, y_n) \leq F_\varphi(\xi_0)$ con $x \in Z_{F_\varphi(\xi_0)}$. Finalmente, $Z_{F_\varphi(\xi_0)} \subseteq Z_\beta$, pues $F_\varphi(\xi_0) < \beta$. Así, $\exists x \in Z_\beta\ \psi^Z(x, y_1, \dots, y_n)$.

Sea α un ordinal arbitrario, encontremos un ordinal $\beta > \alpha$, tal que $L_\beta \neq \emptyset$ y cumpla con las condiciones exigidas en la afirmación anterior, para todas las $\varphi_1, \dots, \varphi_l$.

Sea ζ_0 el primero de todos los ordinales ζ, para los cuales $Z_\zeta \neq \emptyset$ y definimos, recursivamente, la sucesión $\{\beta_p\}_{p\in\omega}$ como sigue,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha \cup \zeta_0 \\ \forall p \in \omega,\ \beta_{p+1} &= max\left\{\beta_p + 1,\ F_{\varphi_1}(\beta_p), \ldots,\ F_{\varphi_l}(\beta_p)\right\} \end{aligned}$$

OjO (**4**). $\alpha,\ \zeta_0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots$

Ahora, si $\beta = Sup\left\{\beta_p\ /\ p \in \omega\right\}$ entonces β es uno que nos sirve. Tenemos de (**4**), que $\beta \in LIM,\ \beta > \alpha$ y $Z_\beta \neq \emptyset$. Finalmente, si $\xi < \beta$, hay un $p \in \omega$ tal que $\xi < \beta_p < \beta$, y para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$, se tiene que

$$F_{\varphi_i}(\xi) \underset{(\mathbf{3})}{\leq} F_{\varphi_i}(\beta_p) \underset{\text{Def } \beta_{p+1}}{\leq} \beta_{p+1} \underset{(\mathbf{4})}{<} \beta$$

†

Al suponer el **ABF**, podemos usar la proposición anterior con $Z = BF = V$ y $Z\_ = R\_$, y obtenemos el importante resultado siguiente,

Corolario$_3$(**ZF**). Para cualquier lista finita de $\in$–fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ se tiene que,

$$\forall\alpha\ \exists\beta > \alpha \left[\ \varphi_1, \ldots, \varphi_l \text{ son absolutas para } R_\beta\ \right]$$