Axiomas de Zermelo–Fraenkel con Átomos.

Naim Nuñez Morales.

En estas notas daremos los axiomas para una teoría de conjuntos con átomos. Esta variante nos permite hablar de objetos (sillas, llaves, perros) que no sean conjuntos, bajo una condición; que ellos no admitan elementos...

Así pues, requerimos antes que nada, modificar nuestro lenguaje, añadiendo una letra predicativa de aridad 1, $\mathscr{A}\,(x)$, que nos ayudará a hablar de (identificar sintácticamente a) los átomos, es decir;

$$\mathscr{A}\,(x) \iff x \text{ es un átomo}$$

Lo primero de lo que uno se ocupa al axiomatizar una teoría con átomos es establecer su peculiaridad...

Axioma (Caracterización de los átomos).

$$\forall x\left[\mathscr{A}\,(x) \longrightarrow \forall z\big(z \notin x\big)\right] \tag{$\mathbf{ZF_0}$}$$

Ahora modificamos nuestro criterio para la igualdad conjuntista, que solo tiene chiste cuando se trata de conjuntos.

Axioma de Extensionalidad.

$$\forall x \forall y\Big(\neg\mathscr{A}\,(x)\ \&\ \neg\mathscr{A}\,(y) \longrightarrow \forall z\big(z \in x \longleftrightarrow z \in y\big) \longrightarrow x = y\Big) \tag{$\mathbf{ZF_1}$}$$

Axioma de Par.

$$\forall a \forall b \exists z \forall w\Big(w \in z \longleftrightarrow \big(w = a \vee w = b\big)\Big) \tag{$\mathbf{ZF_3}$}$$

Notación. Si tenemos objetos, sin iportar si son átomos o conjuntos, u, y v, el único conjunto que tiene como elementos a u y a v, le llamamos el *par de u y de v* y lo denotamos por $\{u, v\}$.

Axioma de Unión.

$$\forall x \exists b \Big[\neg \mathscr{A}(b) \ \&\ \forall w \Big(w \in b \longleftrightarrow \exists z \big(w \in z \ \&\ z \in x \big) \Big) \Big] \qquad (\mathbf{ZF_4})$$

Notación. Dado un objeto x, llamamos *la unión de* x al único conjunto cuya existencia asegura $\mathbf{ZF_4}$, y lo denotamos por $\bigcup x$.

Si a es un átomo, su unión es un conjunto sin elementos[1]. Por si se les había pasado, nunca establecimos que hubiera un conjunto vacío, pero postular eso ya vimos que es necesario solamente cuando no tenemos átomos o no digamos nada sobre ellos. De lo que no nos salvamos es de aceptar que "hay un átomo" o que "la colección de átomos forma un conjunto", cualquiera de ellos nos lleva a la existencia del vacío[2].

Notación. Denotamos por $\emptyset$ al único conjunto (por extensionalidad) que no tiene elementos, al que llamamos *el conjunto vacío*.

Para enunciar el axioma de Potencia, y teniendo en cuenta las observaciones vertidas en clase, vamos a desarrollar un poco mas las nociones previas.

Primero introducimos la noción de subclase:

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \iff \forall z \big(z \in \mathrm{A} \longrightarrow z \in \mathrm{B} \big)$$

Todo átomo a está contenido en cualquier clase, es decir $a \subset \mathrm{A}$. Esto nos obligaría a que la potencia de un conjunto tenga a todos los átomos[3], por lo que la primer idea para enunciar la potencia, a saber:

$$\forall x \exists b \Big[\neg \mathscr{A}(b) \ \&\ \forall w \Big(w \in b \longleftrightarrow w \subseteq x \Big) \Big]$$

No es, de forma intuitiva, la potencia que andamos buscando.

Si además queremos que en la potencia **no** estén presentes los átomos, es esencial pedir que b no pueda ser átomo, para evitar líos a la hora de ver quién es la potencia de un átomo, ¡podría ser otro átomo!

Aunque los líos anteriores pueden evitarse, dando el axioma como en la fórmula anterior, y despues definir la *funcional potencia* de forma adecuada, también se puede dar de tal forma que la potencia sea exactamente el conjunto cuya existencia afirma el axioma.

Axioma de las Partes o de Potencia.

$$\forall x \exists b \Big[\neg \mathscr{A}(b) \ \&\ \forall w \Big(w \in b \longleftrightarrow \big(w \subseteq x \ \&\ \neg \mathscr{A}(w) \big) \Big) \qquad (\mathbf{ZF_5})$$

[1] Verdad que si?

[2] En el último caso requerimos Separación, ¿o no?

[3] Esto encendió los animos en clase

Notación. Dado un conjunto x, llamamos *la potencia de* x al único conjunto cuya existencia asegura $\mathbf{ZF_5}$, y lo denotamos por $\wp(x)$.

Esquema Axiomático de Separación. Sea $\varphi(x)$ una fórmula escrita en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

$$\forall x \exists z \Big[\neg \mathscr{A}(z) \ \& \ \forall w \big(w \in z \longleftrightarrow w \in x \ \& \ \varphi(w) \big) \Big] \tag{$\mathbf{ZF_6}$}$$

siempre que z no ocurra (o no ocurra libremente) en φ.

Notación. Dado un conjunto x y una fórmula φ como se requiere en el esquema anterior, denotamos como $\{ u \in x / \varphi(u) \}$ o como $\{ u / u \in x \ \& \ \varphi(u) \}$ al único conjunto cuya existencia asegura $\mathbf{ZF_6}$.

En vista de los axiomas anteriores, definimos $x^+ = x \cup \{x\}$.

Aquí, aun antes de construir el ordinal $\omega + \omega$, ya podemos darnos idea que hay cosas cerradas bajo sucesor, que podrían no tener al vacío (bueno, con un poco de Reemplazo), a saber, un $\{a\}\_+1$–inductivo, donde a es un átomo. Afortunadamente, ninguno de estos corresponde a nuestra idea de inductivo.

Axioma de Infinito.

$$\exists w \Big[\exists x \Big(x \in w \ \& \ \forall v \big(v \notin w \big) \Big) \ \& \ \forall z \Big(z \in w \longrightarrow z \cup \{z\} \in w \Big) \Big] \tag{$\mathbf{ZF_7}$}$$

Con todas nuestras convenciones, lo anterior se puede reescribir como:

$$\exists w \Big(\varnothing \in w \ \& \ \forall z \big(z \in w \longrightarrow z^+ \in w \big) \Big)$$

Esquema Axiomático de Sustitución o Reemplazo. Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula escrita en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

$$\begin{aligned} \forall x \exists z \Big[\varphi(x,z) \ \& \ \forall w \big(\varphi(x,w) \longrightarrow z = w \big) \Big] \longrightarrow \\ \forall u \exists v \forall w \Big[w \in v \longleftrightarrow \exists y \big(y \in u \ \& \ \varphi(y,w) \big) \Big] \end{aligned} \tag{$\mathbf{ZF_8}$}$$

A la colección de axiomas vistos hasta ahora los conoceremos como $\mathbf{ZFA^-}$ al estilo de siempre.

Axioma de Elección (Selector).

$$\begin{aligned} \forall x \Big[\varnothing \notin x \ \& \ \forall p, q \in x \Big(\exists z \big(z \in p \ \& \ z \in q \big) \longrightarrow p = q \Big) \\ \longrightarrow \exists c \forall s \Big(s \in x \longrightarrow \exists r \big(s \cap c = \{r\} \big) \Big) \Big] \end{aligned} \tag{$\mathbf{AE}$}$$

De esta forma, se tiene que **ZFCA**$^{-}$ = **ZFA**$^{-}$ $+$ **AE**.

Axioma de Buena Fundación.

$$\forall x\Big(\neg\mathscr{A}(x)\ \&\ x\neq\emptyset\longrightarrow\exists z\big(z\in x\ \&\ z\cap x=\emptyset\big)\Big) \tag{\textbf{ABF}}$$

De esta forma, se tiene que **ZFA** = **ZFA**$^{-}$ $+$ **ABF** y que **ZFCA** = **ZFCA**$^{-}$ $+$ **ABF**.