Una propiedad interesante de **BF**.

Naim Nuëz Morales.

Resumen

En estas notas vamos a trabajar sobre un concepto que ya tocamos antes y vimos que solo ocurre en Clases: La Supertransitividad. Veremos que **BF** es una clase única en cierto aspecto. Además, veremos que todo aquello que hacemos en las matemáticas clásicas se puede "hacer" dentro de **BF**, por lo que ya nos dejaremos de preocupar si **ABF** es un axioma central de la Teoria de Conjuntos o podemos prescindir de él[1]

OJO!!! si el lector de estas notas esta oxidado en alguno de los siguientes temas:

(a) Principio de Minimalidad e inducción para Relacionales Bien Fundadas (link).

(b) Principio General de Recursión para Relacionales Bien Fundadas (link).

siga los links (debe tener su cuenta en la página del curso abierta) y repase el tema.

[1]Esto no demerita en absolutamente nada el estudiar modelos de la Teoría de Conjuntos con Antifundación, y menos estando en plena formación. Las matemáticas se tratan de técnicas constructivas, y la usada en contruir un modelo de lo anterior es una de las más formativas y creativas que conozco. Para los clavados que quieran saber un poco más, pueden darle una ojeada al libro de Aczel (Conjuntos no bien fundados) o, mejor aún, a la tesis de Berenice Martínez Barona (El axioma de antifundación: un acercamiento a los conjuntos no bien fundados) que esta en TESIUNAM.

1. BF es una clase única...

Volvamoos a enunciar un par de definiciones.

Definición 1. Sea C una clase.

- C es transitiva si y sólo si $\forall x\left(x \in C \longrightarrow x \subseteq C\right)$.
- C es supertransitiva si y sólo si $\forall y\left(x \subseteq C \longrightarrow x \in C\right)$.

Conocemos un montón de ejemplos de conjuntos transitivos, pero ninguno supertransitivo. De hecho, en clases anteriores mostramos que no los hay y, sin embargo, que **BF** es una clase transitiva y supertransitiva, además de bien fundada por $\in$, lo que deja abierta una cuestión ¿habrá otras clases con estas propiedades? Veremos que la respuesta a esta interrogante es negativa y es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 1. Sean A y B clases. Si

i. A es una clase transitiva bien fundada por $\in$, y

ii. B es una clase supertransitiva,

entonces $A \subseteq B$.

Demostración. Usaremos inducción para Relacionales B.F. sobre la clase A. Necesitaremos una relacional con campo A, así que sólo restringiremos la pertenencia a A, $\in\restriction_A$.

Demostraremos que $\forall x \in A\left(x_{\in\restriction_A} \subseteq B \longrightarrow x \in B\right)$.

Sea $x \in A$ tal que $x_{\in\restriction_A} \subseteq B$.
Como B es supertransitiva, se tiene que $x_{\in\restriction_A} \in B$.
Como A es transitiva y $x \in A$, entonces $x_{\in\restriction_A} = x_{\in}$.
Mediante Inducción terminamos la prueba. ⊣

Corolario 1. Sea C una clase.

- Si C es supertransitiva, entonces $\mathbf{BF} \subseteq C$.
- Si C es transitiva y bien fundada por $\in$, entonces $C \subseteq \mathbf{BF}$.

- **BF** es la única clase transitiva, supertransitiva y bien fundada por $\in$.

Demostración. 1. Use la proposición anterior con $A = \mathbf{BF}$ y $B = C$.

2. Use la proposición anterior con $B = \mathbf{BF}$ y $A = C$.

3. Consecuencia de los anteriores.

$\dashv$

Vimos algunas otras propiedades de **BF** y algunas equivalencias de **ABF**, pero por ahora no las mencionaremos.

2. BF emula muy bien a todas las estructuras del universo.

Si a es un conjunto con estructura de orden (también podría ser de grupo, anillo, etcétera), nos gustaría aprovechar la estructura de **BF** para estudiarlo. En algunos casos tendríamos suerte; cuando el conjunto ya está en tal clase, pero esto no lo podemos asegurar.

Ya que **BF** es una clase, no es descabellado pensar en la existencia de una copia de a dentro de tal clase. De ser este el caso, podríamos copiar la estructura y ya trabajaríamos dentro de **BF** con la copia. Ahora solo nos resta encontrar tal copia...

Teorema 2 (AE)**.** Sea a un conjunto y $r \subseteq a \times a$ (una relación sobre a). Se tiene lo siguiente:

Hay $a' \in \mathbf{B}$, $r' \in \mathbf{BF} \cap (a' \times a')$ y $f : a \longrightarrow a'$ biyección tal que

$$\forall x, y \in a \left(\langle x, y \rangle \in r \longleftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in r' \right)$$

Dicho en corto: f es un isomorfismo de estructuras...

Demostración. Sea β un ordinal biyectable con a (por **TBO**, tal ordinal existe). Sea f un testigo de equipoencia entre ellos, $f : a \longrightarrow \beta$.

La construcción de r' es la usual:

$$\left\langle \gamma, \delta \right\rangle \in r' \Longleftrightarrow \left\langle f^{-1}(\gamma), f^{-1}(\delta) \right\rangle$$

Solo resta probar que $r' \in \mathbf{BF}$, pero esto es consecuencia de que es subconjunto de $\beta \times \beta$ que , como vimos en la clase anterior, está en **BF** (véanse las notas anteriores).

Claramente, la estructura $\langle \beta, r' \rangle$ también resulta ser un bien fundado. $\dashv$

Así cualquier estructura relacional de la Teoría de Conjuntos puede llevarse a una estructura isomorfa en los bien fundados.

Queda como ejercicio ver que lo mismo se puede hacer si agregamos muchas relaciones, muchas funciones o muchas constantes. Es por esta razón que decimos que **BF** es una clase "*isocompleta*".

Ejemplo 3. Sea a un conjunto cualquiera y $b \in \mathbf{BF}$. Es fácil ver que

$$\langle \{a\}, \emptyset \rangle \cong \langle \{b\}, \emptyset \rangle$$