Repaso de los Axiomas de Zermelo–Fraenkel.

Naim Nuñez Morales.

En estas notas haremos un repaso de los axiomas propuestos por Zermelo y enriquecidos por Fraenkel para la teoría de Conjuntos.

Nuestro primer axioma nos da el criterio para la igualdad conjuntista.

Axioma de Extensionalidad.

$$\forall x \forall y \Big(\forall z \big(z \in x \longleftrightarrow z \in y \big) \longrightarrow x = y \Big) \tag{$\mathbf{ZF_1}$}$$

El segundo axioma nos garantiza una teoría no vacía.

Axioma de Existencia. "Hay un conjunto que no tiene elementos."

$$\exists x \forall y \big(y \notin x \big) \tag{$\mathbf{ZF_2}$}$$

Notación. Denotamos por $\emptyset$ al único conjunto (por extensionalidad) que no tiene elementos, al que llamamos *el conjunto vacío.*

Los siguientes son de tipo *constructivo*, nos aseguran la existencia de ciertos conjuntos *a partir de otros conjuntos* ***dados de antemano***.

Axioma de Par.

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \Big(w \in z \longleftrightarrow \big(w = x \vee w = y \big) \Big) \tag{$\mathbf{ZF_3}$}$$

Notación. Si tenemos conjuntos u, y v, el único conjunto que tiene como elementos a u y a v, le llamamos el *par de u y de v* y lo denotamos por $\{ u, v \}$.

Axioma de Unión.

$$\forall x \exists y \forall w \Big(w \in y \longleftrightarrow \exists z \big(w \in z \;\&\; z \in x \big) \Big) \tag{$\mathbf{ZF_4}$}$$

Notación. Dado un conjunto x, llamamos *la unión de x* al único conjunto cuya existencia asegura $\mathbf{ZF_4}$, y lo denotamos por $\bigcup x$.

Es en este momento que introducimos la noción de subconjunto:

$$x \subseteq y \Longleftrightarrow \forall z\big(z \in x \longrightarrow z \in y\big)$$

Axioma de las Partes o de Potencia.

$$\forall x \exists y \forall w \Big(w \in y \longleftrightarrow w \subseteq x\Big) \tag{$\mathbf{ZF_5}$}$$

Notación. Dado un conjunto x, llamamos *la potencia de* x al único conjunto cuya existencia asegura $\mathbf{ZF_5}$, y lo denotamos por $\wp(x)$.

Esquema Axiomático de Separación. Sea $\varphi(x)$ una fórmula escrita en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

$$\forall x \exists z \forall w \big(w \in z \longleftrightarrow w \in x \ \& \ \varphi(w)\big) \tag{$\mathbf{ZF_6}$}$$

siempre que z no ocurra (o no ocurra libremente) en φ.

Notación. Dado un conjunto x y una fórmula φ como se requiere en el esquema anterior, denotamos como $\left\{ u \in x \big/ \varphi(u) \right\}$ o como $\left\{ u \big/ u \in x \ \ \& \ \ \varphi(u) \right\}$ al único conjunto cuya existencia asegura $\mathbf{ZF_6}$.

En vista de los axiomas anteriores, definimos $x^+ = x \cup \{x\}$.

El siguiente es el último de los axiomas de existencia, en este caso asegura la existencia de un conjunto inductivo.

Axioma de Infinito.

$$\exists w \Big[\exists x \Big(x \in w \ \& \ \forall v \big(v \notin w\big)\Big) \ \& \ \forall z \Big(z \in w \longrightarrow z \cup \{z\} \in w\Big)\Big] \tag{$\mathbf{ZF_7}$}$$

Con todas nuestras convenciones, lo anterior se puede reescribir como:

$$\exists w \Big(\emptyset \in w \ \& \ \forall z \big(z \in w \longrightarrow z^+ \in w\big)\Big)$$

Axioma de Buena Fundación.

$$\forall x \Big(x \neq \emptyset \longrightarrow \exists z \big(z \in x \ \& \ z \cap x = \emptyset\big)\Big) \tag{$\mathbf{ABF}$}$$

El siguiente axioma dice, de forma intuitiva, que las imágenes de conjuntos bajo *funcionales* también resultan ser conjuntos.

Esquema Axiomático de Sustitución o Reemplazo. Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula escrita en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

$$\begin{gathered}\forall x \exists z \Big[\varphi(x,z) \;\&\; \forall w \big(\varphi(x,w) \longrightarrow z = w\big)\Big] \longrightarrow \\ \forall u \exists v \forall w \Big[w \in v \longleftrightarrow \exists y \big(y \in u \;\&\; \varphi(y,w)\big)\Big]\end{gathered} \tag{$\mathbf{ZF_8}$}$$

Así, el sistema de axiomas que nos interesará durante este semestre, ya que vamos a trabajar en la consistencia de **AFA**, es

$$\mathbf{ZF}^- = \{\mathbf{ZF_1}, \ldots, \mathbf{ZF_5}, \mathbf{ZF_7}\} + \mathbf{ZF_6} + \mathbf{ZF_8} = \{\mathbf{ZF_1}, \ldots, \mathbf{ZF_5}, \mathbf{ZF_7}\} \cup \mathbf{ZF_6} \cup \mathbf{ZF_8}$$

Los axiomas anteriores son redundantes, pero por ahora no nos preocuparemos en esa parte de la “elegancia”.

A veces nos interesará presentar resultados que requieran de **ABF**, para esos casos denotamos por **ZF** a la teoría cuyos axiomas son $\mathbf{ZF}^- + \mathbf{ABF}$.

Axioma de Elección.

$$\forall x \Big[\varnothing \notin x \longrightarrow \exists f \Big(f : x \to \bigcup x \;\&\; \forall y \in x \big(f(y) \in y\big)\Big)\Big] \tag{$\mathbf{AE}$}$$

De esta forma, se tiene que:

$$\mathbf{ZFC}^- = \mathbf{ZF}^- + \mathbf{AE}$$

$$\mathbf{ZFC} = \mathbf{ZF} + \mathbf{AE}$$