Ejemplo BF.

Naim Nuñez Morales.

2 de septiembre de 2015

Resumen

Desarrollemos un ejercicio propuesto en el Kunnen (Ep. III). Damos por hecho que todos sabemos obtener la representación binaria de un número “n” escrito en base 10, ya sea como nos enseñaron en primaria o mediante la Forma Normal de Cantor.

Intuitivamente, describimos una relación $\mathbf{E}$ para números naturales n, m de la siguiente manera:

$n\mathbf{E}m$ si y sólo si *hay un* 1 *en el* n*–ésimo lugar de la representación binaria de* m[1].

Por ejemplo:

$1_{10} = 1_2$	$2_{10} = 10_2$	$13_{10} = 1101_2$	$43_{10} = 101011_2$	$156_{10} = 10011100_2$
$0\mathbf{E}1$	$0\not\mathbf{E}2$	$0\mathbf{E}13$	$0\mathbf{E}43$	$2\mathbf{E}156$
$1\not\mathbf{E}1$	$1\mathbf{E}2$	$2\mathbf{E}13$	$1\mathbf{E}43$	$3\mathbf{E}156$
		$3\mathbf{E}13$	$3\mathbf{E}43$	$4\mathbf{E}156$
		$1\not\mathbf{E}13$	$5\mathbf{E}43$	$7\mathbf{E}156$
		$4\not\mathbf{E}13$	$4\not\mathbf{E}43$	$6\not\mathbf{E}156$

Pero esta descripción tiene una formulación precisa en términos aritméticos, que proviene justamente de la manera en que se obtiene la representación binaria de un número:

Definición 0.1.

$$n\mathbf{E}m \iff 2 \nmid \lfloor m2^{-n} \rfloor$$

[1] Leído de derecha a izquierda

También podemos decir que $n\mathbf{E}m$ si y sólo si n aparece como el exponente de alguno de los sumandos de la Forma Normal De CANTOR.

Observación 0.2.

$$a\mathbf{E}b \implies a < b$$

Esto es fácil de ver con nuestra descripción:

Sea n un número natural escrito en base 10. Llamemos $\ell(n)$ a la longitud de la representación binaria de n. Así

$$\begin{array}{c|c|c} \ell(1) = 1 & \ell(2) = 2 & \ell(4) = 3 \\ \ell(13) = 4 & \ell(43) = 6 & \ell(156) = 8 \end{array}$$

Esto se puede ver con mayor "seriedad":

$$\ell(n) = \text{mín}\{m : n \leq 2^m\} = \{m : 2^m < n\}$$

Luego, si $a\mathbf{E}b$, entonces $a < \ell(b)$, por lo que $a < 2^a < b$.

Lo anterior nos sugiere que...

Afirmación 0.3. $\mathbf{E}$ bien funda a ω.

Esta prueba no la vamos a hacer directamente. En vez de eso veremos la forma divertida: por Recursión para Relacionales Bien Fundadas, pero NO para $\omega, \mathbf{E}$, sino para $R_\omega, \in$.

Mediante el EGR/RBF *construimos* la relacional

$$F : R_\omega \to \mathbf{V}$$

$$F(a) = \sum_{x \in a} 2^{F(x)} = \sum \{2^{F(x)} : x \in a\}$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}
F(\varnothing) &= \sum \varnothing = 0 \\
F(1) = F(\{\varnothing\}) &= 2^{F(\varnothing)} = 2^0 = 1 \\
F(\{1\}) &= 2^{F(1)} = 2^1 = 2 \\
F(2) = F(\{0,1\}) &= 2^{F(0)} + 2^{F(1)} = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 \\
F\left(\{0,\{1\}\}\right) &= 2^{F(0)} + 2^{F(\{1\})} = 2^0 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \\
F\left(\left\{0,1,2,\{0,\{1\}\}\right\}\right) &= 2^{F(0)} + 2^{F(1)} + 2^{F(2)} + 2^{F(\{0,\{1\}\})} \\
&= 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^5 = 1 + 2 + 8 + 32 = 43
\end{aligned}$$

Teorema 0.4. F es un isomorfismo entre R_ω y ω

Demostración. Vamos a hacer la prueba paso a paso:

- Primero se prueba que $F[R_\omega] \subseteq \omega$, lo que se hace mediante inducción.
- La inyectividad de F se obtiene por la unicidad de la forma normal de Cantor.
- La suprayectividad de F se lleva a cabo por inducción sobre ω: Sea $n \in \omega$ tal que $n \subseteq F[R_\omega]$. Consideramos la Forma Normal de Cantor

  $$n = 2^{m_1} + \cdots + 2^{m_k}$$

  donde $m_1 > \cdots > m_k$. Claramente cada $m_i < n$. Mediante la hipótesis inductiva construimos el conjunto muy fácilmente.
- La parte de que es morfismo tambien sale rapido, viendo la Forma Normal.

$\dashv$

Como ya tenermos isomorfismo, sale que **E** bien funda a ω. Esta prueba no uso Eleccion y ademas nos da una forma de "computar" a R_ω. Por cierto, F^{-1} es la función de colapso de $R_\omega, \in$.