Tarea 1 (Avances).

TDC–III.

12 de octubre de 2015

Problema 0.1. (**ABF**) Sea A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional de equivalencia sobre A.

Demuestre que hay una funcional $F \colon A \to \mathbf{V}$[1] con la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in A \left(F(x) = F(y) \longleftrightarrow x \, \mathbf{R} \, y \right)$$

¿Es cierto que $F(y) \, \mathbf{R} \, y$?

Problema 0.2. Sea a un conjunto. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $x \in CT(\{a\})$.
- Hay un camino finito de a hasta x. Es decir, hay $n \in \omega$ y $t \colon n+1 \to CT(\{a\})$ tales que $t(0) = a$, $t(n) = x$, y para todo $i \in n$ se tiene que $t(i+1) \in t(i)$.

Enuncie cuidadosamente la generalización de este resultado para una relacional $\mathbf{R}$. Si lo prefiere demuestre la generalización.

Problema 0.3. Todo conjunto tiene una pintura que es un árbol.

Problema 0.4. Sea a un conjunto y $\langle g, \leftarrow, p \rangle$ una pintura de este. Demuestre que

$$a \in BF \longleftrightarrow \langle g, \leftarrow \rangle \in \mathbf{COBF}$$

Problema 0.5. Demuestre que **ABF** implica **AFA** unicidad.

Problema 0.6. Para este problema recuerde la prueba de que *Todo sistema tiene una única decoración* (Proposición 4 de las Notas de Sistemas).

[1] Una función con la propiedad que se pide,junto como su imagen, se llama un cociente de A módulo $\mathbf{R}$.

- Muestre que, en general, no es cierto que dos decoraciones sean compatibles.
- ¿Porqué en la prueba mencionada si se da tal compatibilidad?

Problema 0.7. ($\mathbf{ZF}^-$) Sean A una clase, $\mathbf{S} \subseteq A \times A$ una relacional cualquiera, y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional de equivalencia sobre A. Sean $F, G \colon A \to \mathbf{V}$ cocientes módulo $\mathbf{R}$.

Copie la relación $\mathbf{S}$ a $F[A]$ como S_1, y a $G[A]$ como S_2 de la manera vista en clase. Demuestre que $F[A], S_1$ es isomorfo a $G[A], S_2$.

Problema 0.8. Sean $M, \leftarrow, N, \leftarrow'$ sistemas. Recuerde la definición de la relacional $\mathbf{W}$ vista en clase.

Demuestre que

$$\forall a, b \in M\big(a \equiv_M b \longleftrightarrow a\,\mathbf{W}\,b\big)$$

Problema 0.9. Sean $M, \leftarrow, N, \leftarrow'$ sistemas, $F, G \colon M \to N$ N–decoraciones de M y sea $\mathbf{S}$ una bisimulación en N.

Demuestre que $\dfrac{(F \times G)^{-1}}{\mathbf{S}}$ es una bisimulación en M.

Problema 0.10. Demuestre que la composición de decoraciones es decoración.