El Teorema de Rieger.

Naim Nuñez Morales.

1 de septiembre de 2014

Resumen

Ya que hemos visto las relativizaciones (en A,R) de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos ($\mathbf{ZF}^-$), se observa que, en la mayoría de los casos, para mostrar que son verdaderas, hay que tomar un **subconjunto** de la clase A en cuestión y hay que *asegurar* que existe algún $x \in A$ cuyos R–predecesores sean exactamente aquellos que conforman el conjunto con el que comenzamos.

Vamos a ver que tal característica es lo bastante fuerte como para asegurar que A,R es modelo (interno) de casi toda lo que uno necesita de la Teoría de Conjuntos.

Definición 1. Sea A una clase y R una relacional.
Decimos que A es R–saturada si y sólo si

- $R \subseteq A \times A$.
- R es izquierda limitada;

$$\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \longleftrightarrow zRx\right).$$

- Para todo $x \subseteq A$, **hay un único** $y \in A$ tal que $x = y_R$;

$$\forall x \left(x \subseteq A \longrightarrow \exists ! y \left(y \in A \;\&\; \forall w \left(w \in x \longleftrightarrow wRy\right)\right)\right).$$

En el caso que $R = \in_A$, simplemente decimos que A es *saturada*.

Ejemplo 1. $\mathscr{V}$ y BF son saturadas.

Aún más, toda clase transitiva y supertransitiva es saturada.

Observaciones. Sea A una clase transitiva.

$$A \text{ es saturada} \iff A \text{ es supertransitiva.}$$

Proposición 1 ($\mathbf{ZF}^-$). No hay un conjunto a ni $r \subseteq a \times a$ tal que a sea r–saturado.

Demostración. En caso contrario, sean a un conjunto y $r \subseteq a \times a$ una relación tales que a sea r–saturado. Definamos $f : \wp(a) \longrightarrow a$; f asigna a cada $u \subseteq a$ al (único) elemento [por r–saturación] de a tal que $(f(u))_r = u$. Es claro que f es una función inyectiva, por lo que $\wp(a) \preccurlyeq a$!!! $\square$

Teorema de Rieger. Sea A clase, R una relacional y $\Sigma \subseteq \mathscr{L}^0_\in$. Si

i) $\Sigma \vdash \mathbf{Z}^-$[1] y

ii) $\Sigma \vdash A$ es R–saturada,

entonces

1.- $\Sigma \vdash \{\mathbf{ZF_1}, \mathbf{ZF_2}, \mathbf{ZF_3}\}^{A,R}$ y $\Sigma \vdash \mathbf{ZF_6}^{A,R}$.

2.- Además, si $\Sigma \vdash \mathbf{ZF}^-$, entonces $\Sigma \vdash \mathbf{ZF}^{-A,R}$.

Más aún, si $\Sigma \vdash \mathbf{AE}$, también $\Sigma \vdash \mathbf{AE}^{A,R}$.

Observaciones. En la práctica, las hipótesis $\Sigma \vdash \mathbf{Z}^-$, $\Sigma \vdash \mathbf{ZF}^-$ y $\Sigma \vdash \mathbf{AE}$ se materializarán como $\mathbf{Z}^- \subseteq \Sigma$, $\mathbf{ZF}^- \subseteq \Sigma$ y $\mathbf{AE} \in \Sigma$, respectivamente. Es por esto que se suele decir "si tenemos (o suponemos) Reemplazo, tenemos Reemplazo e Infinito en A" o "si tenemos (o suponemos) Elección, tenemos Elección en A".

Demostración. Sean A, R y Σ como en las hipótesis del teorema.

Para cada $u \subseteq A$, denotemos como $u^{A,R}$ al único elemento de A tal que ${u^{A,R}}_R = u$ (por R–saturación).

$\mathbf{ZF_1}^{A,R}$ Sean $x, y \in A$ tales que $x_R = y_R$.
R es I.L. (según Σ) $\implies$ x_R y y_R "son conjuntos" (según Σ).
$R \subseteq A \times A$ (según Σ) $\implies$ $x_R, y_R \subseteq A$ (según Σ).
Por unicidad de la "cabeza de x_R" (o de y_R, cuestión de gustos), $x = y$.

[1] $\mathbf{Z}^- = \{\mathbf{ZF_1}, \ldots, \mathbf{ZF_5}, \mathbf{ZF_7}\} \cup \mathbf{ZF_6}$, $\mathbf{ZF}^- = \mathbf{Z}^- \cup \{\mathbf{ZF_8}\}$.

$\mathbf{ZF_2}^{A,R}$ Ya que $\emptyset$ es conjunto, $\emptyset \subseteq A$ (según Σ) y ${\emptyset^{A,R}}_R = \emptyset$, este $\emptyset^{A,R}$ es el “que juega el papel del”[2] vacío en A,R.

$\mathbf{ZF_3}^{A,R}$ Sean $x,y \in A$. Es claro que $\{x,y\}$ es conjunto y $\{x,y\} \subseteq A$ (según Σ). Como ${\{x,y\}^{A,R}}_R = \{x,y\}$, este $\{x,y\}^{A,R} \in A$ es el que requeríamos.

$\mathbf{ZF_6}^{A,R}$ Sea φ un fórmula como en $\mathbf{ZF_6}$ y $x \in A$. Consideremos la colección

$$s := \left\{w : w \in x_R \ \& \ \varphi^{A,R}(w)\right\}$$

Ya que $R \subseteq A \times A$ (según Σ), $s \subseteq A$. R es izquierda limitada, así que x_R es conjunto. Luego, $\left\{w : w \in x_R \ \& \ \varphi^{A,R}(w)\right\}$, s, es conjunto (por $\mathbf{ZF_6}$ “afuera”). De esta forma, $s^{A,R}$ es el que requeríamos.

Con esto queda demostrada la primera parte del teorema.
Para la segunda parte, supongamos que $\Sigma \vdash \mathbf{ZF}^-$.
Consideremos las funcionales $G,H : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$ como

$$G(u) = \begin{cases} u^{A,R} & \text{si } u \subseteq A. \\ u & \text{e.o.c.} \end{cases} \qquad H(u) = \begin{cases} u_R & \text{si } u \in A. \\ u & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$\mathbf{ZF_4}^{A,R}$ Sea $x \in A$. Consideremos la colección

$$s := \left\{w : \exists\, y \left(y \in x_R \ \& \ w \in y_R\right)\right\} \subseteq A.$$

Puesto que $R \subseteq A \times A$, $s \subseteq A$. Veamos que s es conjunto (según Σ);

$$s = \bigcup \left\{y_R : y \in x_R\right\}$$

para lo que usamos unión y extensionalidad “afuera”. Es fácil ver que $H[x_R] = s$, por lo que (por Reemplazo “afuera”) s es conjunto.

Así las cosas, $s^{A,R}$ es el que requeríamos.

$\mathbf{ZF_5}^{A,R}$ Sea $x \in A$. Consideremos la colección $s := \{w \in A : w_R \subseteq x_R\}$.
Es claro que $s \subseteq A$. Para ver que s es conjunto (según Σ y por Reemplazo “afuera”), basta ver que $G\left[\wp(x_R)\right] = s$ (ejercicio).

Así las cosas, $s^{A,R}$ es el que requeríamos.

[2] Desde afuera decimos que juega el papel, A,R dice que este es...

$\mathbf{ZF_8}^{A,R}$ Sea φ una fórmula como en $\mathbf{ZF_8}$. Supongamos que

$$\forall x \in A\, \exists y \in A \left(\varphi^{A,R}(x,y) \ \&\ \forall z \in A \left(\varphi^{A,R}(x,z) \longrightarrow y = z \right) \right)$$

es decir, φ se comporta como una funcional $F' : A \longrightarrow A$. Sea $a \in A$. Lo que hay que demostrar es que

$$\exists b \in A\, \forall c \in A \left(cRb \longleftrightarrow \exists d \in A \left(dRa \ \&\ \varphi^{A,R}(d,c) \right) \right)$$

$$\exists b \in A\, \forall c \in A \left(cRb \longleftrightarrow \exists d \left(dRa \ \&\ \varphi^{A,R}(d,c) \right) \right)$$

$$\exists b \in A \left(b_R = \left\{ c \in A : \exists d \left(d \in a_R \ \&\ \varphi^{A,R}(d,c) \right) \right\} \right)$$

es decir, nos falta mostrar que hay $b \in A$ tal que $b_R = F'[a_R]$. Definimos $G' : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$ de la manera que sigue[3];

$$G'(u) = \begin{cases} F'(u) & \text{si } u \in A. \\ \emptyset^{A,R} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Así las cosas, $IMG(G') \subseteq A$. Como a_R es conjunto, $G'[a_R]$ es conjunto, pero $G'[a_R] = F'[a_R]$. Por saturación ($G'[a_R] \subseteq A$) se cumple lo que queríamos.

$\mathbf{ZF_7}^{A,R}$ Como tenemos Infinito "afuera", utilizaremos recursión para ω, con la cual encontraremos una subclase de A, que resultará conjunto por Reemplazo "afuera", mediante la que obtendremos un monito al que A,R verá como inductivo. Primero haremos la relativización de $\mathbf{ZF_7}$;

$$\begin{aligned} \mathbf{ZF_7}^{A,R} \ \mathit{syss}\ & \left[\exists x \left(\exists w \in x \left(\forall u \left(u \notin w \right) \right) \& \forall y \in x \left[\exists v \in x \left(\forall t \left(t \in v \longleftrightarrow t \in y \vee t = y \right) \right) \right] \right) \right]^{A,R} \\ \mathit{syss}\ & \exists x \in A \left[\exists w \in x_R \left(\forall u \left(u \notin w_R \right) \right) \& \forall y \in A \cap x_R \left(\exists v \in x_R \left(\forall t \in A \left(t \in v_R \longleftrightarrow t \in y_R \vee t = y \right) \right) \right) \right] \\ \mathit{syss}\ & \exists x \in A \left[\exists w \in x_R \left(\forall u \left(u \notin w_R \right) \right) \& \forall y \in x_R \left(\exists v \in x_R \left(\forall t \left(t \in v_R \longleftrightarrow t \in y_R \vee t = y \right) \right) \right) \right] \\ \mathit{syss}\ & \exists x \in A \left[\exists w \in x_R \left(w_R = \emptyset \right) \& \forall y \in x_R \left(\exists v \in x_R \left(v_R = \{y\} \cup y_R \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Antes de continuar, veamos que, si $a \in A$, entonces $\{a\} \cup a_R \subseteq A$[4]. Por saturación, tenemos determinado, de manera única, a $\left(\{a\} \cup a_R \right)^{A,R}$. Definamos pues a la funcional $F_1 : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$ como sigue;

$$F_1(a) = \left(\{a\} \cup a_R \right)^{A,R}$$

[3] Queda como ejercicio ver que esta manera de hacer las cosas esta bien hecha.

[4] a_R es conjunto, porque R es I.L. Luego, por Unión y Par, esa $\{a\} \cup a_R$ es conjunto

Sea $F'' : \omega \longrightarrow A$ la única funcional cuya existencia asegura el Esquema de Recursión (para ω) tal que

$$F''(0) = \emptyset^{A,R}$$
$$\forall n \in \omega, \quad F''(n^+) = F_1(F''(n)) = \left(\{F''(n)\} \cup \left(F''(n)\right)_R\right)^{A,R}$$

No es díficil darse cuenta que $F''[\omega] \subseteq A$[5]. Por Reemplazo "afuera", $F''[\omega]$ es un conjunto. Por saturación, hay un único $w \in A$ tal que $w_R = F''[\omega]$. A este único w lo denotaremos $\omega^{A,R}$. Es sencillo ver que este es el que nos sirve.

Para la última parte, también supongamos que $\Sigma \vdash$ **AE**. Primero vamos a desarrollar lo que dice el axioma de elección:

$$\forall a\Big[\emptyset \notin a \,\&\, a \neq \emptyset \longrightarrow \exists c\Big(\forall x \in a\Big[\exists y\Big(\big(y \in x \,\&\, y \in c\big) \,\&\, \forall z\big[z \in x \,\&\, z \in c \longrightarrow z = y\big]\Big)\Big]\Big)\Big]$$

Para demostrar $\mathbf{AE}^{A,R}$, sea $a \in A$. Veamos que

$$\forall y \in a_R\big(y_R \neq \emptyset\big) \,\&\, a_R \neq \emptyset \longrightarrow \exists c \in A\Big(\forall x \in A \cap a_R\Big[\exists y \in A\Big(y \in x_R \cap c_R \,\&\, \forall z \in A\big[z \in x_R \cap c_R \longrightarrow z = y\big]\Big)\Big]\Big)$$

o bien

$$\forall y \in a_R\big(y_R \neq \emptyset\big) \,\&\, a_R \neq \emptyset \longrightarrow \exists c \in A\Big(\forall x \in a_R\Big[\exists y \in A\Big(y \in x_R \cap c_R \,\&\, \forall z \in A\big[z \in x_R \cap c_R \longrightarrow z = y\big]\Big)\Big]\Big)$$

Así las cosas, supongamos que $\forall y \in a_R\big(y_R \neq \emptyset\big) \,\&\, a_R \neq \emptyset$. De esta forma, para el conjunto[6] $\{y_R : y \in a_R\}$ tomemos un conjunto r tal que, para todo $y \in a_R$,

(a) $r \cap y_R \neq \emptyset$.

(b) Para todo z_1, z_2, si $z_1, z_2 \in r \cap y_R$, entonces $z_1 = z_2$.

Luego, $s := r \cap A$ es conjunto (por $\mathbf{ZF_6}$) y $s \subseteq A$. Por saturación, consideremos a $s^{A,R} \in A$ y veamos que este es el que nos sirve. Recordemos que ${s^{A,R}}_R = s$. Sea $x \in a_R$.

Por (a) y (b), sea n el único elemento de $r \cap x_R$. Como nRx y $R \subseteq A \times A$, $n \in A$.

- Se tiene entonces que $n \in r \cap A = s$, de donde $n \in x_R \cap {s^{A,R}}_R$.

[5] Si, sale por inducción.

[6] Ya vimos en otro inciso la forma en que esto se prueba.

- Sea $z \in A$ tal que $z \in x_R \cap s^{A,R}{}_R$. Entonces $z \in x_R \cap s$, luego $z \in x_R \cap r$. Por unicidad de n, $n = z$.

$\square$

Corolario 1 (ZF⁻). No hay un conjunto a ni $r \subseteq a \times a$ tal que a sea r–saturado.

Demostración. Tomense conjuntos a, r tales que a es r–saturado. Como $a \subseteq a$, hay un único $z \in a$ tal que $z_R = a$. Luego $\left[\exists x \forall y \left(y \in x\right)\right]^{A,R}$, lo que es una contradicción a $\mathbf{ZF_6}^{A,R}$. $\square$

Como a uno le gustaría tener modelos internos que modelen a **ABF**, uno busca que le debe pedir al modelo...... Después de mucho pensar, nos damos cuenta que lo que hay que pedir no es otra cosa que R bien funde a A.

Corolario 2. Sea A una clase y R una relacional. Si desde $\mathbf{ZF}^-$ demostramos que A es R–saturada y R bien funda a A, entonces $\mathbf{ZF}^- \vdash \mathbf{ZF}^{A,R}$.

Además, si trabajamos desde $\mathbf{ZFC}^-$, entonces $\mathbf{ZFC}^- \vdash \mathbf{ZFC}^{A,R}$

Demostración. Teorema de Rieger, numeral 2, y $\mathbf{ABF}^{A,R}$ es lo mismo que R bien funda a A. $\square$

Corolario 3. $CONS(\mathbf{ZF}^-) \Longrightarrow CONS(\mathbf{ZF})$.

Demostración. Utilice el corolario 2 con $A = BF$, $R = \in_{BF}$, trabajando desde $\mathbf{ZF}^-$. Después aplique el Teorema de Consistencia Relativa para Modelos Internos. $\square$

Corolario 4. $CONS(\mathbf{ZFC}^-) \Longrightarrow CONS(\mathbf{ZFC})$.

Demostración. Utilice el corolario 2 con $A = BF$, $R = \in_{BF}$, trabajando desde $\mathbf{ZFC}^-$. Después aplique el Teorema de Consistencia Relativa para Modelos Internos. $\square$

De esta forma, a partir de los teoremas de Rieger y de Consistencia Relativa tenemos que:

$$CONS(\mathbf{ZFC}) \Longleftrightarrow CONS(\mathbf{ZFC}^-) \Longrightarrow CONS(\mathbf{ZF}^-) \Longleftrightarrow CONS(\mathbf{ZF})$$

Referencias

[1] **Jon Barwise** (editor): *Handbook of Mathematical Logic*.
North-Holland, Amsterdam, 1978.

[2] **N. Bourbaki(A)**: *Éléments de mathématique*.
Hermann, Paris, 1966.

[3] **N. Bourbaki(B)**: *Éléments de mathématique; théorie des ensembles*.
Hermann, Paris, 1966.

[4] **Paul J. Cohen**: *The independence of the continuum hypotesis. Parte I*.
Proc. Nat Acad. Sci., 1963.

[5] **Herbert B. Enderton**: *A mathematical Introduction to Logic*.
Academic Press, New York, 1972.

[6] **Kurt Gödel**: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypotesis*.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 1938.

[7] **D. Hilbert and P. Bernays**: *Grundlagen der Mathematik I, II*.
Springer-Verlag, New York, 1968.

[8] **Elliott Mendelson**: *Introduction to Mathematical Logic*.
Wadswoorth & Brooks, Monterey, California, 3a edición, 1987.

[9] **H. Rasiowa and R. Sikorski**: *The Mathematics of Metamathematics*.
Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1963.