Un poco de Lógica

I. Sintaxis

1. El Lenguaje (Formal de primer orden) para la Teoría de Conjuntos, $\mathcal{L}_\in$ es aquella que tiene como único símbolo no lógico -es decir su tipo de semejanza consta de- una letra predicativa binaria: $\in$ (la pertenencia). Así, $\mathcal{L}_\in$ es un conjunto de símbolos de la forma:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}_\in = & \{\in\} & \text{(No-Lógicos: la pertenencia)} \\ & \cup\ \{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} & \text{(Variables)} \\ & \cup\ \{=\} & \text{(Igualdad)} \\ & \cup\ \{\neg,\ \&,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\} & \text{(Conectivos)} \\ & \cup\ \{\forall, \exists\} & \text{(Cuantificadores)} \\ & \cup\ \{),\ (,\ ,\} & \text{(Auxiliares o de Puntuación)} \end{array}$$

Más adelante, solo consideraremos como conectivos a la negación y a la conjunción $(\neg,\ \&)$ y únicamente al cuantificador existencial $(\exists)$, todos los restantes $(\vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \forall)$ quedarán como definidos.

2. $EXP_\in = \{e \ / \ e$ es una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{L}_\in\}$

$= \{e \ / \ e$ es una $\in$–expresión$\}$

3. $TRM_\in = \{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} = VAR.$

4. $ATM_\in = \{(x = y) \ / \ x,y \in VAR\} \cup \{(x \in y) \ / \ x,y \in VAR\}.$

5. $FRM_\in$ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que contiene a las atómicas y es cerrado bajo conectivos y cuantificadores. Es decir,

I) $ATM_\in \subseteq FRM_\rho$. Y

II). a). Si $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, entonces

$$(\neg\alpha),\ (\alpha\ \&\ \beta),\ (\alpha \vee \beta),\ (\alpha \rightarrow \beta),\ (\alpha \leftrightarrow \beta) \in FRM_\rho$$

b). Si $\alpha \in FRM_\rho$ y $x \in VAR$, entonces

$$(\forall x\, \alpha),\ (\exists x\, \alpha) \in FRM_\rho$$

6. **Principio de Inducción sobre la formación de fórmulas**:

Sea $\wp$ una propiedad que “compete” a $\in$ –expresiones.

Si

I) Todas las $\in$ –atómicas tienen la propiedad $\wp$, es decir:

a) Si $x,y \in VAR$, entonces $\wp((x = y))$. Y

b) Si $x, y \in VAR$, entonces $\wp((x \in y))$. Y

II) a) Si $\alpha, \beta \in FRM_{\in}$ son tales que $\wp(\alpha)$ y $\wp(\beta)$, entonces

$$\wp(\neg\alpha), \wp(\alpha \,\&\, \beta), \wp(\alpha \vee \beta), \wp(\alpha \rightarrow \beta) \text{ y } \wp(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

b) Si $\alpha \in FRM_{\rho}$ que cumple con $\wp(\alpha)$ *y* $n \in \mathbb{N}$, entonces $\wp(\forall v_n \alpha)$ y $\wp(\exists v_n \alpha)$,

entonces toda $\in$ –fórmula tiene la propiedad $\wp$.

7. Ocurrencias de una variable, *Libres* y *Acotadas*.

a). $\mathcal{L}_{\in}^{n} = \left\{\alpha \in FRM_{\in} \;/\; \alpha \text{ tiene exactamente } n \text{ variables líbres}\right\}$.

b). $\mathcal{L}_{\in}^{0} = \left\{\sigma \in FRM_{\in} \;/\; \sigma \text{ es un } \rho\text{–enunciado}\right\}$.

II. Semántica

8. $\mathfrak{A}$ es una *Interpretación* del lenguaje de la Teoría de Conjuntos, $\mathcal{L}_{\in}$, lo cual denotaremos por $\mathfrak{A} \in V_{\in}$, syss hay dos conjuntos a y r tales que:

i). $\mathfrak{A} = \langle a, r \rangle$,

ii). $a \neq \emptyset$. (a es el universo de interpretación, donde “variarán” las variables) Y

iii). $r \subseteq a \times a$. (r es le interpretación de la pertenencia: $\in^{\mathfrak{A}} = r$).

9. Definición de *Satisfacibilidad* (Tarski–1936):

Sean $\mathfrak{A} \in V_{\rho}$, $\alpha \in FRM_{\rho}$ y $s \in {}^{\omega}A = \left\{s \;/\; s : \mathbb{N} \rightarrow A\right\}$.

a). $\mathfrak{A} \models \alpha\,[s]$: $\mathfrak{A}$ *Satiface* α en s.

b). $\mathfrak{A} \models \alpha$: α es *Verdadera* en $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{A}$ es *Modelo* de α.

c). $\models \alpha$: α es *Universalmente Verdadera*.

10. Sean $\sigma \in \mathcal{L}_{\rho}^{0}$ y $\mathfrak{A} \in V_{\rho}$.

a). σ es verdadero o falso en $\mathfrak{A}$ (ley del tercero excluido).

b). σ no puede ser verdadero y falso en $\mathfrak{A}$ (ley de no contradicción).

c). $\mathfrak{A} \models \sigma$ syss $(\neg\sigma)$ es falso en $\mathfrak{A}$ y α es falsa en $\mathfrak{A}$ syss $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$.

11. Sean $\mathfrak{A} \in V_{\rho}$ y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_{\rho}^{0}$ (se podría pensar que Σ es un conjunto de axiomas).

$$\mathfrak{A} \models \Sigma \text{ syss } \mathfrak{A} \models \sigma \text{ para todo } \sigma \in \Sigma$$

Léase: $\mathfrak{A}$ es un Modelo de Σ.

12. Dado un conjunto de enunciados Σ (pensar en axiomas) nos interesa ver aquellos enunciados que son verdaderos en todos los modelos de Σ (dicho de otra manera (último tercio del s. XIX) de sus “teoremas”) es decir de sus consecuencias lógicas.Formalmente,

Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_{\rho}^{0}$:

$$\Sigma \models \sigma \text{ syss para cada } \mathfrak{A} \in V_{\in}, \text{ si } \mathfrak{A} \models \Sigma, \text{ entonces } \mathfrak{A} \models \sigma.$$

Léase: σ es *Consecuencia Lógica* de Σ.

III. Cálculo de Predicados. Correctud, Completud, Consistencia.

En lo que sigue, $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$.

13. Un *Cálculo de Predicados*.

Se elige un conjunto de fórmulas, llamados *Axiomas Lógicos,* junto con algunas *Reglas de Inferencia,* de tal suerte que cumplan con las propiedades dadas en **14** y **15**.

Con esto se da la definición de *Deducción* de una fórmula a partir de un conjunto Σ de fórmulas, llamadas *Hipótesis* o *Axiomas Propios.*
—Una fórmula α se *Deduce* de Σ syss hay una sucesión finita de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales la última (α_n) es α y cada una de ellas es un axioma lógico, o una fórmula de Σ, o se obtiene de fórmulas anteriores aplicando una regla de inferencia—. Esto se denota por

$$\Sigma \vdash \alpha$$

y se dice que, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es una deducción de α

α es *deducible* de Σ.

14. El cálculo debe ser *Correcto: (Metateorema de Correctud).*

$$\text{Si } \vdash \sigma, \text{ entonces } \models \sigma$$

Es una consecuencia inmediata que,

$$\text{Si } \Sigma \vdash \sigma, \text{ entonces } \Sigma \models \sigma$$

equivalentemente:

$$\text{Si } \Sigma \vdash \sigma \text{ y } \mathfrak{A} \models \Sigma, \text{ entonces } \mathfrak{A} \models \sigma.$$

15. El cálculo debe ser *Completo:*
(Metateorema de Completez. Gödel, 1929; tesis doctoral*).*

$$\text{Si } \models \sigma, \text{ entonces } \vdash \sigma.$$

—Completud Semántica: Completo respecto a las Universalmente Válidas—

De hecho se tiene algo más fuerte:

$$\text{Si } \Sigma \models \sigma, \text{ entonces } \Sigma \vdash \sigma.$$

$$\therefore \qquad \vdash \;\rightleftharpoons\; \models$$

16. **Def**. *Consistencia* de un conjunto, Σ, de enunciados.

$CON(\Sigma)$ syss **no** hay un $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, tal que $\Sigma \vdash \sigma$ y $\Sigma \vdash \neg\sigma$.

17. a). $CON(\Sigma)$ syss **hay** un $\sigma \in \mathcal{L}^0_\in$, tal que $\Sigma \nvdash \sigma$.

b). $\Sigma \nvdash \sigma$ syss $CON(\Sigma \cup \{\neg\sigma\})$

18. *Metateorema de Adecuidad:*

Si hay un $\mathfrak{A} \in V_\rho$, tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, entonces $CON(\Sigma)$.

19. Que el cálculo sea completo es equivalente a:

Si $CON(\Sigma)$, entonces hay un $\mathfrak{A} \in V_\rho$, tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

20. **Def**. Un conjunto de enunciados Σ es *Completo* syss para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, $\Sigma \vdash \sigma$ o $\Sigma \vdash \neg\sigma$

—Completud Sintáctica—

21. Con **15**, tenemos:

Σ es *Completo* syss para todo $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$, $\Sigma \models \sigma$ o $\Sigma \models \neg\sigma$.

Quisieramos: Dado $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$,

¡...Σ consistente y completo...!

IV. Teoremas de Incompletud de Gödel (1931).

Aquí se parte de un lenguaje que contenga un contenido aritmético básico, es decir, un lenguaje formal de primer orden numerable, cuyos símbolos no lógicos tengan (indefinidos o definidos) a $<$, $+$, $\cdot$, s , 0 .

Diremos que un conjunto de fórmulas es *decidible* syss es computable. Es decir, si hay un algoritmo que permita determinar de manera mecánica si una fórmula cualquiera pertenece o no al conjunto en cuestión.

En lo que sigue supongamos que: Σ es un conjunto de enunciados **decidible** y escrito en un lenguaje que contenga un contenido aritmético básico.

• Primer Teorema de Incompletud (**Gödel-Rosser**).

Sea Σ un conjunto de axiomas que contenga (o se deduzcan) las verdades aritméticas más simples. Así,

Si $CON(\Sigma)$, entonces Σ es Incompleto.

Nota:

Gödel prueba algo más débil: Bajo las suposiciones dadas:
Hay un enunciado σ_G (enunciado de Gödel) tal que:

a). Si $CON(\Sigma)$, entonces $\Sigma \nvdash \sigma_G$. Y

b). Si Σ es ω–consistente, entonces $\Sigma \nvdash \neg\sigma_G$.

La noción de ω–consistencia es estrictamente más fuerte que consistencia simple. En resumen, lo que prueba Gödel es: Si Σ es ω–consistente, entonces Σ es incompleto. Sin embargo, Barkley Rosser en 1936, modificando la prueba dada por Gödel, encuentra un enunciado σ_R (enunciado de Rosser) tal que bajo la suposición de la consistencia simple, éste, σ_R, es indecidible para Σ, es decir ni él ni su negación se pueden deducir y por tanto, será incompleta.

• Segundo Teorema de Incompletud (G**ödel**).

Sea Σ un conjunto de axiomas que contenga (o se deduzca) una aritmética razonable y sea razonablemente potente (en particular que contenga la aritmética de

Peano). Así,

$$\text{Si } CON(\Sigma), \text{ entonces } \Sigma \nvdash con(\Sigma).$$

donde $con(\Sigma)$ es un enunciado tal que expresa en el lenguaje formal la consistencia de Σ.

Lo que nos dice este resultado es: La consistencia de una teoría, lo suficientemente potente, no puede demostrarse con medios formalizables en la misma teoría.

Gödel no demostró propiamente este teorema, sólo argumentó en favor de su plausibilidad. La primera prueba completa, muy laboriosa, fué dada en 1939 por Hilbert y Bernays (en el segundo volumen del *Grundlagen der Mathematik).*

Unos últimos comentarios:

1. Los teoremas de Incompletud se aplican a la Teoría de Conjuntos de primer orden (Zermelo-Fraenkel (**ZF**)).

2. Las pruebas de consistencia de teorías de primer orden, lo suficientemente potentes, se remiten a pruebas relativas de consistencia: Si T_1 y T_2 son teorías, lo más que podemos alcanzar es:

$$CON(T_1) \Rightarrow CON(T_2)$$

Esta consistencia relativa se aplica a algunos fragmentos de **ZF**.

3. Gödel en 1939 demostró que el Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo son consistentes con **ZF**. Es decir, si extendemos a **ZF** con dichos principios, como nuevos axiomas, el resultado es una teoría consistente, si **ZF** lo es. En símbolos:

$$CON(\mathbf{ZF}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF} + \mathbf{AE} + \mathbf{HC})$$

Para terminar este comentario, en 1963 Paul Cohen mostró la parte faltante para la independencia:

$$CON(\mathbf{ZF}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{AE})$$

y

$$CON(\mathbf{ZFC}) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF} + \neg\mathbf{HGC})$$

4. Son objetivos de este curso, dar las pruebas relativas de consistencia, siguientes:

$$CON(\mathbf{ZF}^-) \Rightarrow CON(\mathbf{ZF}^- + \mathbf{ABF})$$

y

$$CON(\mathbf{ZFC}^-) \Rightarrow CON(\mathbf{ZFC}^- + \neg\mathbf{ABF})$$