Modelos Internos
de la Teoría de conjuntos

Trabajaremos en el lenguaje de la teoría de conjuntos, $\mathcal{L}_{\in}$.

En lo que sigue, sean M una clase –una fórmula– y E una relacional –otra fórmula– sobre M, es decir, $E \subseteq M \times M$.

Sea $\varphi \in FRM_{\in}$. Definimos recursivamente, desde el metalenguaje, *La Relativización de* φ *a* M,E, denotado por $\varphi^{M,E}$, como sigue:

1. Sean $x,y \in VAR$. Así:

a. $(x \in y)^{M,E} \rightleftharpoons \left(x\, E\, y\right)$

b. $(x = y)^{M,E} \rightleftharpoons (x = y)$

2. Sean $\psi, \chi \in FRM_{\in}$ y $x \in VAR$. Así:

a. $(\neg\psi)^{M,E} \rightleftharpoons (\neg\psi^{M,E})$

b. $(\psi \ \&\ \chi)^{M,E} \rightleftharpoons \left(\psi^{M,E} \ \&\ \chi^{M,E}\right)$.

c. $\left(\exists x\, \psi\right)^{M,E} \rightleftharpoons \left(\exists x \left(x \in M \ \&\ \psi^{M,E}\right)\right)$

Notación: Sea $\Sigma \cup \Gamma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}^{0}_{\in}$.

1. Si $\Sigma \vdash \sigma^{M,E}$ diremos que σ es *verdadero en* M,E, *según* Σ o que M,E, es *un Modelo de* σ, *según* Σ.

2. Escribiremos $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$ para denotar que *todos los enunciados de* Γ *son verdaderos en* M,E, *según* Σ.

3. Si $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$ diremos que M,E, es un *Modelo de* Γ, *según* Σ.

Ejemplos: …

Metateorema Fundamental para pruebas relativas de consistencia.

Sea $\Sigma \cup \Gamma \subseteq \mathcal{L}^0_\in$.

Si:

1. $\Sigma \vdash \exists\, x\, (x \in M)$ y
2. $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$,

entonces:

$$CON(\Sigma) \Rightarrow CON(\Gamma)$$

Prueba: Supongamos que Σ es consistente, por lo tanto, Σ tiene un $\in$–modelo, e.d. hay $\mathfrak{A} = \langle A, r\rangle \in V_\in$, con A un conjunto no vacío y $\in^{\mathfrak{A}} = r \subseteq A \times A$, tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Basta probar que Γ tiene un modelo.

Definimos:

1. $B \subseteq A$, como sigue:
$$B = \left\{ b \in A \ / \ \mathfrak{A} \models x \in M\,[b] \right\} \quad \text{.................................(*)}$$

2. $s \subseteq B \times B$, como sigue:
Sean $x, y \in VAR$; para todo $b_0, b_1 \in B$,
$$b_0\, s\, b_1 \text{ syss } \mathfrak{A} \models \left(x\, E\, y\right) [b_0, b_1] \quad \text{..............................(**)}$$

Tenemos que $B \subseteq A \neq \emptyset$, además $B \neq \emptyset$ pues: $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\Sigma \vdash \exists\, x\, (x \in M)$, por lo que $\mathfrak{A} \models \exists\, x\, (x \in M)$. Así, hay un $b_0 \in A$ con la propiedad de que $\mathfrak{A} \models x \in M\,[b_0]$ y por tanto $b_0 \in B$.

Ahora bien, si ponemos $\in^{\mathfrak{B}} = s$, resulta que $\mathfrak{B} = \langle B, s\rangle$ es una interpretación del lenguaje $\mathcal{L}_\in$, en símbolos $\mathfrak{B} \in V_\in$. Afirmamos que $\mathfrak{B} \models \Gamma$, para ello probaremos antes, algo más fuerte:

Af$_1$. Para toda $\varphi \in FORM_\in$, se tiene que:
$$\text{para toda } t \in {}^{\omega}B,\ \mathfrak{A} \models \varphi^{M,E}\,[t] \text{ syss } \mathfrak{B} \models \varphi\,[t]. \qquad (+)$$

Prueba: Esta se hará por inducción sobre la formación de fórmulas:

I. Sean $x, y \in VAR$ y $b_0, b_1 \in B$. Así,

a. $\mathfrak{A} \models (x \in y)^{M,E}[b_0, b_1]$	syss	$\mathfrak{A} \models \left(x\, E\, y\right)[b_0, b_1]$	Def.
	syss	$b_0\, s\, b_1$	(**)
	syss	$\mathfrak{B} \models (x \in y)\,[b_0, b_1]$	Tarsky ($\in^{\mathfrak{B}} = s$)

b. $\mathfrak{A} \models (x = y)^{M,E}\,[b_0, b_1]$ syss $\mathfrak{A} \models (x = y)\,[b_0, b_1]$ Def.
syss $b_0 = b_1$ Tarsky
syss $\mathfrak{B} \models (x = y)\,[b_0, b_1]$ Tarsky

II. Sean $\psi, \chi \in FOR_{\in}$ y supongamos, inductivamente, que cumplen $(+)$ y sea $v_i \in VAR$. Sea $t \in {}^{\omega}B$, así,

a. $\mathfrak{A} \models (\neg\psi)^{M,E}\,[t]$ syss $\mathfrak{A} \models \neg(\psi^{M,E})\,[t]$ Def.
syss $\mathfrak{A} \not\models \psi^{M,E}\,[t]$ Tarsky
syss $\mathfrak{B} \not\models \psi\,[t]$ HI $(+)$
syss $\mathfrak{B} \models \neg\psi\,[t]$ Tarsky

b. $\mathfrak{A} \models (\psi \;\&\; \chi)^{M,E}\,[t]$ syss $\mathfrak{A} \models (\psi^{M,E}) \;\&\; (\chi^{M,E})\,[t]$ Def.
syss $\mathfrak{A} \models (\psi^{M,E})\,[t]$ y $A \models (\chi^{M,E})\,[t]$ Tarsky
syss $\mathfrak{B} \models \psi\,[t]$ y $B \models \chi\,[t]$ HI $(+)$
syss $\mathfrak{B} \models \left(\psi \;\&\; \chi\right)[t]$ Tarsky

c.
$\mathfrak{A} \models \left(\exists\, v_i\, \psi\right)^{M,E}[t]$ syss $\mathfrak{A} \models \exists\, v_i \left[v_i \in M \;\&\; (\psi)^{M,E}\right]\left[\;t\;\right]$ Def.
syss hay $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \left[v_i \in M \;\&\; (\psi)^{M,E}\right]\left[t\left(v_i \;/\; a\right)\right]$ Tarsky
syss hay $a \in A$, tal que Tarsky
$\mathfrak{A} \models v_i \in M\left[t\left(v_i \;/\; a\right)\right]$ y $\mathfrak{A} \models \psi^{M,E}\left[t\left(v_i \;/\; a\right)\right]$
syss hay $b \in B$, tal que $\mathfrak{B} \models \psi\left[t\left(v_i \;/\; b\right)\right]$ (*) e HI
syss $\mathfrak{B} \models \exists\, v_i\, \psi\left[\;t\;\right]$ Tarsky

†

De aquí, como caso particular, tenemos la siguiente:

Af₂. Para todo $\sigma \in \mathcal{L}_{\in}^{0}$ se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \sigma^{M,E} \text{ syss } \mathfrak{B} \models \sigma$$

Prueba del MT fundamental:

Puesto que $\Sigma \vdash \Gamma^{M,E}$ y $\mathfrak{A} \models \Sigma$, tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma^{M,E}$ para todo $\sigma \in \Gamma$ y aplicando la **Af₂**., obtenemos que: para todo $\sigma \in \Gamma$, $\mathfrak{B} \models \sigma$; concretando $\mathfrak{B} \models \Gamma$ y por tanto Γ es consistente.

†