Propiedades Básicas

Aquí estaremos trabajando en **ZF⁻** y cuando usemos el **AE** o algún debilitamiento, lo haremos explícito.

Gráficas Punteadas Accesibles (GPA).

Definición$_1$. $\mathcal{G}$ es una *Gráfica* (*Orientada* o *Digráfica*) syss

$$\mathcal{G} = \langle g, r \rangle \text{ donde } g \in V \text{ y } r \subseteq g \times g.$$

Notación:

- A los elementos de g les llamaremos *Nodos* o *Vértices* y a los de r, *Aristas.*
- En el caso de que $\langle q,p \rangle \in r$, escribiremos $q \leftarrow p$, y diremos que q es un *Hijo* de p.
- A $\mathcal{G} = \langle g,r \rangle$, la denotaremos por $\langle g,\leftarrow \rangle$ o símplemente como g

Definición$_2$. Sea $\langle g,\leftarrow \rangle$ una gráfica. t es un *Camino en* g syss t es una sucesión **finita** o **infinita** de nodos, $p_0, p_1, p_2, \ldots,$ de g tales, que $p_{n+1} \leftarrow p_n$. Formalmente:

1. $t \in {}^{\underset{\smile}{\omega}}g \cup {}^{\omega}g$ y

2. $\forall n \in \omega\Big[(n+1) \in DOM(t) \rightarrow \Big(t(n+1) \leftarrow t(n) \Big) \Big].$

Definición$_3$. Sean $\mathcal{G}$ una gráfica y t un camino en $\mathcal{G}$. Diremos que t *es un Ciclo* o que t *tiene un ciclo* syss hay $i, j \in DOM(t)$, con $i \neq j$ y $t(i) = t(j)$.

Observación: Los ciclos se pueden ver como caminos infinitos.

Ejemplos:

- $t_0 = \emptyset$ es un camino, en cualquier gráfica. El *Camino Vacío.*
- Si $p \in g$ y $t_p : 1 \rightarrow g$, con $t_p(0) = p$, entonces t_p es un camino, en cualquier gráfica.
- $\Big\langle \{p\},\ \emptyset \Big\rangle$ tiene exactamente dos caminos: t_0 y t_p.

  ¿Cuántos caminos tiene la gráfica $\Big\langle g,\ \emptyset \Big\rangle$?
- Son caminos de $\Big\langle \{p\},\ \{\langle p,p \rangle\} \Big\rangle$ los siguientes:

i) $t_0 = \emptyset$ y t_p,

ii) Las funciones constantes p :

a) Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, las funciones $t_p^n : n \to \{p\}$ donde $\forall m \in n\,[t_p^n(m) = p]$, y

b) $t_p^\omega : \omega \to \{p\}$ donde $\forall m \in \omega\,[t_p^\omega(m) = p]$.

Definición$_4$. $\mathcal{G}$ es una *Gráfica Punteada* o *con Cabeza* syss $\mathcal{G} = \langle g,r,p\rangle$ donde

1. $\langle g,r\rangle$ es una gráfica y
2. p es un elemento (distinguido) de g. Llamada su *Cabeza* o su *Punta*.

Notación: $g_p \leftrightharpoons \langle g,\leftarrow,p\rangle$

Definición$_5$. Sea g_p una gráfica punteada. Diremos que g_p es una *Gráfica Punteada Accesible* syss para todo nodo q de g, hay un camino **finito** desde p hasta q. Formalmente:

Si $q \in g$, entonces hay un $n \in \omega$ y una $t \in {}^{n+1}g$ tales, que

i). $t(0) = p$ y $t(n) = q$. Y

ii). $\forall i \in n\left[t(i+1) \leftarrow t(i)\right]$.

Notación:

1. $GPA = \left\{g_p \;/\; g_p \text{ es una gráfica punteada accesible}\right\}$
2. $T_g = \left\{t \;/\; t \text{ es una camino de } g_p \;\&\; t(0) = p\right\}$

Ejemplos:

- $\langle\{p\},\emptyset,p\rangle$ y $\langle\{p\},\{\langle p,p\rangle\},p\rangle$ son GPA (ver ejemplo anterior).
- Sean $p,q \in V$, con $p \neq q$. Así, $\langle\{p,q\},\{\langle q,p\rangle\},p\rangle \in GPA$ y tiene exactamente 4 caminos, de los cuales 2 son testigos de la accesibilidad.
- Sean $p,q \in V$, con $p \neq q$. Así, $\langle\{p,q\},\{\langle p,q\rangle,\langle q,p\rangle\},p\rangle$ y $\langle\{p,q\},\{\langle p,q\rangle,\langle q,p\rangle\},q\rangle$ son **dos** $GPA's$ (¡isomorfas!).
- Sean $g = \{a,b,c\}$ y $\leftarrow\ = \{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$, así g_a y g_c son gráficas punteadas **distintas** y $g_a \in GPA$, pero $g_c \notin GPA$.
- $\left\langle\omega,\left\{\langle n+1,n\rangle \;/\; n \in \omega\right\},0\right\rangle \in GPA$.

Gráficas Bien Fundadas.

Recordar$_1$:

1. Una relacional R bien funda a la clase A syss todo subconjunto no-vacío de A tiene un elemento R-minimal, e.d.

$$\forall x\Big[\emptyset \neq x \subseteq A \ \rightarrow \ \exists y \in x \ \forall z \in x\Big(\neg \ zry \ \Big)\Big]$$

En el caso en que $A = cam(R)$ diremos simplemente que R *es Bien Fundada.*

2. Si R bien funda a A, entonces **no** hay una sucesión infinita $\langle a_i \rangle_{i\in\omega}$, de elementos de A, tal que

$$\forall i \in \omega \Big[a_{i+1} \ \ R \ \ a_i\Big]$$

La conversa de la anterior es cierta bajo la suposición del **AED**.

3. $\langle a,r \rangle \in COBF$ syss

i) $r \subseteq a \times a$ y

ii) r bien funda a a.

4. **a**. $BF = \bigcup_{\alpha\in OR} R_\alpha$

b. $a \in BF$ syss $\langle ct(a), \in_{ct(a)} \rangle \in COBF$

(Ésta bien puede ser la definición de *Conjunto Bien Fundado,* visto como un conjunto y no como estructura.)

Siendo congruentes con este contexto:

Definición$_6$. Una gráfica $\langle g, \leftarrow \rangle$ es bien fundada syss $\langle g, \leftarrow \rangle \in COBF$.

Corolario$_7$.

1. Ninguna gráfica bien fundada, tiene caminos infinitos (y por tanto, ciclos).

2. (**AED**) Toda gráfica sin caminos infinitos (ni ciclos), es bien fundada.

Decoraciones y Pinturas.

Definición$_8$. Diremos que d es una *Decoración para* $\langle g, \leftarrow \rangle$ o *para* $\langle g, \leftarrow, p \rangle$ syss

$$d : g \rightarrow V$$

$$\forall q \in g \left[d(q) = \left\{ d(r) \ / \ r \leftarrow q \right\} \right]$$

al conjunto $d(p)$ se le llama el *valor* de (la decoración) d.

Una inmediata pregunta es ¿qué gráficas tienen decoraciones? y en tal caso ¿cuántas? Una respuesta parcial, nos la da el Teorema (Esquema) del Colapso de Mostowski. La traducción de éste al lenguaje de gráficas es como sigue:

Corolario$_9$.

1. Toda gráfica bien fundada, tiene una única decoración y toma valores en los conjuntos bien fundados.

2. Toda gráfica bien fundada y extensional, tiene una única decoración, la cual es un isomorfismo y toma valores en los conjuntos bien fundados.

El ser extensional se transcribe en este contexto como: **No** hay **dos** nodos que tengan los mismos hijos, o, equivalentemente, dados **dos** nodos, hay un tercero que es hijo de uno y no lo es del otro.

Se puede mejorar el resultado anterior, en su primera parte:

Proposición$_{10}$. Un conjunto es bien fundado syss es el valor de una decoración de alguna GPA bien fundada.

Prueba:

$\Rightarrow \Big]$ Sea $a \in V$. Consideremos: $g = ct(\{a\})$ y $\leftarrow \ = \ \in_g$. Así, $g_a = \langle g, \leftarrow, a \rangle$ es una gráfica punteada accesible (Ver **Recordar$_2$**) y extensional. Si ponemos que $d = Id_g$, resulta que d es una decoración para g_a con valor el conjunto a.
Ahora bien, si $a \in BF$, entonces $\langle ct(\{a\}), \in_g \rangle \in COBF$ y por tanto, g_a es bien fundada.

$\Leftarrow \Big]$ Esto es el primer punto del corolario anterior. †

$* + * + *$

Recordar$_2$. Sea a un conjunto arbitrario. Así, $b \in ct(a)$ syss hay hay una sucesión finita $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ tal, que

i) $a_0 = a$ y $a_n = b$. Y

ii) $\forall i \left[i < n \ \rightarrow \ a_{i+1} \in a_i \right]$.

Esto, se puede generalizar para la clausura R–transitiva (con R una relacional izquierda limitada).

$* + * + *$

Ya tenemos las herramientas suficientes para decir lo que entenderíamos por una pintura de un conjunto.

Definición$_{11}$. Una *Pintura* de un conjunto es una GPA la cual tiene una decoración cuyo valor es dicho conjunto.

Con esta nueva noción y considerando lo anterior tenemos,

Corolario$_{12}$.

1. Todo conjunto tiene una pintura.
(La construida, anteriormente, se llama *La Pintura Canónica de* a).

2. Toda GPA bien fundada es pintura de un único conjunto y éste es bien fundado.

3. Todo conjunto bien fundado tiene una pintura bien fundada.

Un conjunto tiene varias pinturas, a parte de la canónica nos interesa otra más.

Definición$_{13}$. Una GPA es un *Árbol* syss entre dos nodos hay un único camino. La cabeza es su *Raiz.*

Proposición$_{14}$. Todo conjunto tiene una pintura que es un árbol.
Prueba: **Tarea$_1$**.
Sugerencia: Pruebe algo equivalente: Para toda $GPA,$ hay otra la cual es un árbol y es pintura del mismo conjunto.

Sabemos que un conjunto bien fundado tiene una pintura, que es una gráfica (una GPA) bien fundada, pero tiene otras pinturas. ¿Tendrá una que no sea bien fundada? la respuesta es **no** y esto queda establecido en la siguiente,

Proposición$_{15}$. Sean a un conjunto y $\langle g, \leftarrow, p \rangle$ una pintura de este. Así,

$$a \in BF \leftrightarrow \langle g, \leftarrow \rangle \in COBF$$

Prueba: **Tarea$_2$**.
Sugerencia: Primero pruebe el siguiente,
Lema. Si d es una decoración para g_p con valor $a,$ entonces los nodos estan decorados con elementos de la $ct(\{a\}),$ es decir, $d : g \to ct(\{a\}).$ †