# Introduciendo AFA

Concretando ideas tenemos que, todo conjunto tiene una pintura y algunas gráficas –las bien fundadas– tienen (una y única) decoración. Lo cual motiva la pregunta: ¿Toda gráfica tiene una decoración? y en tal caso ¿ésta, será única? Es tema de este curso ver que éste enunciado es un "indecidible para **ZF**$^{-}$". Lleva el nombre de:

**Axioma de Anti-Fundación** (**AFA**):

Toda gráfica tiene una única decoración.

Bajo la suposición de este axioma, tenemos inmediatamente:

**Corolario$_{16}$**(**AFA**). Toda $GPA$ es pintura de un único conjunto.

En particular, teniendo en cuenta la **Proposición$_{15}$**,

**Corolario$_{17}$**(**AFA**). Toda $GPA$ no bien fundada es pintura de un único conjunto no–bien fundado.

Veamos un ejemplo, considere la siguiente $GPA$: sean $p \in V$ y $\mathcal{G} = \langle \{p\}, \{\langle p,p \rangle\}, p\rangle$, ésta no es bien fundada y por tanto, de principio, no podemos asegurar que tenga una decoración; sin embargo al usar **AFA** tendría una (y además única) decoración, $d_{\mathcal{G}} : \{p\} \to V$, y con esto, hay un único conjunto, digamos $\Omega$ tal que $\Omega = d_{\mathcal{G}}(p)$ y con la propiedad de que $\Omega = \{\Omega\}$. Dicho de otra manera, $\mathcal{G}$ es una pintura de $\Omega$. Éste conjunto es no-bien fundado y transitivo. Con esto hemos probado la siguiente,

**Proposición$_{18}$**(**ZF**$^{-}$)

1. **AFA** $\to$ Existen conjuntos no–bien fundados ($BF \subsetneq V$).
2. **AFA** $\to$ $\neg$**ABF**

Una pregunta inmediata es ¿$\Omega$ es único o hay otro? o dicho de otra manera: ¿hay conjuntos $x$ y $y$ tales que $x = \{x\}$, $y = \{y\}$ con $x \neq y$? A éste tipo de conjuntos se les llama, *Conjuntos Reflexivos.*

El criterio que tenemos para determinar la igualdad entre conjuntos nos la proporciona el Axioma de Extensionalidad (**ZF$_1$**): Dos conjuntos son iguales siempre que tengan los mismos elementos. Sin embargo, para nuestros conjuntos reflexivos $x$ y $y$, **no funciona**. Este criterio trabaja perfectamente para conjuntos bien fundados, pues tarde que temprano podemos mostrar si son o no iguales. El problema es claro ahora, para conjuntos no–bien fundados el axioma **ZF$_1$** no nos sirve como criterio. Lo que se puede hacer es trabajar con la unicidad que nos la otorga **AFA**.

**Proposición$_{19}$(AFA)**. Hay un único conjunto reflexivo.
**Prueba**: Sean $a, b \in V$ tales que $a = \{a\}$ y $b = \{b\}$. Consideremos un conjunto cualquiera $c$ y formemos la $GPA$, siguiente: $\mathcal{C} = \langle\{c\}, \{c, c\}, c\rangle$. Ahora bien, las funciones $d_1 : \{c\} \to V$ y $d_2 : \{c\} \to V$ tales que $d_1(c) = a$ y $d_2(c) = b$. Ambas son decoraciones de $\mathcal{C}$. Ahora debido a la unicidad garantizada por **AFA**, tenemos que $d_1 = d_2$ y por tanto $a = b$. †

Por ello y puesto que, como veremos, hay otras formas de tener axiomas que afirmen la existencia de más conjuntos no–bien fundados, nos conviene escribir:

**AFA**$_\exists$ $\leftrightharpoons$ Toda gráfica tiene al menos una decoración.

**AFA**$_!$ $\leftrightharpoons$ Toda gráfica tiene a lo más una decoración.

Con esta notación, la existencia de (al menos) un conjunto que se pertenezca a sí mismo se debe a **AFA**$_\exists$, y por tanto **AFA**$_\exists$ $\to \neg$**ABF**. Pero el hecho de que éste sea único es gracias a **AFA**$_!$. Tenemos un resultado importante,

**Proposición$_{20}$. ABF $\to$ AFA$_!$**
**Prueba**: **TAREA**. †

Consideremos más ejemplos:

**1**). Sean $p, q \in V$ tales que $p \neq q$. Considere la $GPA$ siguiente: $\langle\{p, q\}, \{\langle p, q\rangle, \langle q, p\rangle\}, p\rangle$ y sea $C_\Omega : \{p, q\} \to V$ la función constante $\Omega$. Así $C_\Omega$ es una decoración, cuyo valor es $\Omega$. Por tanto, la gráfica es otra pintura de $\Omega$.

**2**). Consideremos la siguiente $GPA$, $\langle\omega, \leftarrow, 0\rangle$, donde $\forall n \in \omega\, [n^+ \leftarrow n]$ y $C_\Omega : \omega \to V$ la función constante $\Omega$. La gráfica es otra pintura de $\Omega$.

El conjunto $\Omega$ tiene muchas pinturas y podemos caracterizarlo. Primero, notemos que en los ejemplos anteriores, el papel de $\Omega$ es irrelevante, lo que importa en realidad es que sea un conjunto reflexivo. Tenemos el siguiente resultado.

**Proposición$_{21}$**. Sean $a$ un conjunto reflexivo y $g_p = \langle g, \leftarrow, p\rangle \in GPA$.

$g_p$ es pintura de $a$ syss todo nodo de $g_p$ tiene hijos.

**Prueba**:

$\Rightarrow$ ] Supongamos que $g_p$ es una pintura de $a$. Así, hay una decoración de $g_p$, digamos $d : g \to V$, con valor $a$. Veamos que si $q$ es un nodo arbitrario de $g$, éste tiene un hijo. Sabemos que hay un camino finito desde $p$ hasta $q$; digamos que $a_0, \ldots, a_n \in g$ son tales que $a_0 = p$ y $a_n = q$ y

$$a_n \leftarrow \ \ldots \ \leftarrow a_0$$

ahora, por ser $d$ decoración de $g_p$, tenemos que

$$d(a_n) \in \ \ldots \ \in d(a_0)$$

pero $d(a_0) = d(p) = a = \{a\}$, con lo que concluimos que $d(q) = d(a_n) = a = \{a\} \neq \emptyset$ y por tanto $q$ debe tener un hijo.

$\Leftarrow \ \big]$ Supongamos ahora que en $g_p$, cada nodo tiene almenos un hijo. La función constante $a$, restringida a $g$, es una decoración para $g_p$. Pues, sea $\mathcal{C}_a : g \to V$ dada por $\mathcal{C}_a(q) = a$, para toda $q \in g$. En primer lugar, $\mathcal{C}_a(p) = a$ y ahora, si $q \in g$, entonces $q$ tiene hijos y por tanto $\Big\{x \ / \ \exists r \Big[ r \leftarrow q \ \ \& \ \ x = \mathcal{C}_a(r) \Big]\Big\} \neq \emptyset$. Así,

$$\begin{aligned} \Big\{\mathcal{C}_a(r) \ / \ r \leftarrow q\Big\} &= \{a\} \\ &= a \\ &= \mathcal{C}_a(q) \end{aligned}$$ †

Este resultado no depende de **AFA**$_\exists$, ni tampoco de **AFA**$_!$. Bajo la suposición de todo **AFA**, el único conjunto reflexivo, $\Omega$, queda caracterizado por "una $GPA$ es pintura de $\Omega$ syss cada nodo de la $GPA$ tiene hijos".

Otros ejemplos con **AFA** :

**3**). Sea $g_p \in GPA$ donde $g = \{p,q\}$ y $\leftarrow \ = \Big\{\langle q,p\rangle, \ \langle p,p\rangle\Big\}$. Por **AFA**$_\exists$, hay un conjunto $0^* = \Big\{0, \ 0^*\Big\}$. El cual al "desenvolverlo" se ve así: $\{0, \{0, \{0, \ldots\}\}\}$.

**4**). Sea $g_r \in GPA$ donde $g = \{p,q,r\}$ y $\leftarrow \ = \Big\{\langle q,r\rangle, \ \langle p,r\rangle, \ \langle p,p\rangle\Big\}$. Por **AFA**$_\exists$, hay un conjunto $0^\# = \Big\{0, \ \Omega\Big\}$. Al "desenvolverlo": $\Big\{0, \ \Big\{ \ \{\ldots\}\Big\}\Big\}$

**5**). Para un conjunto cualquiera $a$, se tienen $a^*$ y $a^\#$.

**Corolario**$_{22}$(**AFA**$_\exists$). Hay una clase propia de conjuntos no–bien fundados.

**6**). ¿Hay un conjunto $x$ tal que $x = \langle 0,x\rangle$? o equivalentemente ¿Hay un conjunto $x$ tal que $x = \Big\{\{0\}, \ \Big\{0, \ x\Big\}\Big\}$?

Para dar una respuesta, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en cuatro variables, $x, \ y, \ z, \ w$ :

$$\begin{aligned} x &= \Big\{y, \ z\Big\} \\ y &= \{w\} \\ z &= \Big\{w, \ x\Big\} \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Si el sistema tiene solución, tendremos una respuesta afirmativa. Y éste tiene solución si la gráfica siguiente está correctamente decorada:

FIGURA

Así, $a = \langle 0, a \rangle$ y al "desenvolverlo" lo vemos así: $\langle 0\ ,\ \langle 0\ ,\ \langle 0\ , \ldots \rangle \rangle \rangle$.