SISTEMAS

Iniciamos esta sección, generalizando la noción de gráfica para clases y de forma natural la de decoración.

Definición$_1$. La pareja $M, \leftarrow$ es un *Sistema* syss

1. M es una clase.

2. $\leftarrow \;\subseteq M \times M$ y

3. $\leftarrow$ es izquierda limitada.

Notación: Sean $M, \leftarrow$ un sistema y $a \in M$.

i). Denotaremos, simplemente, por M al sistema $M, \leftarrow$.

ii). $a_M = \left\{ b \in M \;/\; b \leftarrow a \right\}$ (el cual es un conjunto, por ser $\leftarrow$ izquierda limitada)

iii). $M_a = \left\langle g, \;\leftarrow_a\;, a \right\rangle$, donde:

a) $g = CT_{\leftarrow}(\{a\})$ (existe, pues $\leftarrow$ es izquierda limitada) y

b) $\leftarrow_a \;=\; \leftarrow \restriction g$.

Es claro que, $M = \bigcup\limits_{a \in M} M_a$ y que para toda $a \in M,$ se tiene que $M_a \in GPA$.

A M_a le llamaremos la *Subgráfica de* M, *generada por* a.

Definición$_2$. Una funcional D es una *Decoración* para el sistema M syss

$$D : M \to V$$

$$\forall a \in M \;\; \left[D(a) = \left\{ D(b) \;/\; b \leftarrow a \right\} \right]$$

Proposición$_3$. Si D es una decoración para el sistema M y $a \in M,$ entonces $D \restriction M_a$ es una decoración para M_a.

Prueba: Ejercicio.

Proposición$_4$. **AFA** es equivalente a

Todo sistema tiene una única decoración (**CAFA**)

Prueba: El "regreso" de la equivalencia es obvio. Veamos la otra parte.

Sea pues M un sistema. Para cada $a \in M,$ sea d_a la única decoración de la gráfica M_a. Sea

$$D : M \to A$$

$$\forall a \in M \;\;\; D(a) = d_a(a)$$

Así, D es una decoración para $M.$ De hecho, $D = \bigcup_{a \in M} d_a.$ La unicidad de $D,$ se debe a la unicidad de las decoraciones de sus subgráficas. †

TAREA:

1. En general, no es cierto que dos decoraciones sean compatibles.

2. ¿Qué es lo que ocurre entonces en la prueba anterior?

Pasemos ahora a dar una noción fundamental para la teoría de los conjuntos No–bien fundados:

Definición₅. Sean $M, \leftarrow$ un sistema y R una relacional sobre $M,$ es decir $R \subseteq M \times M.$

1. La relacional $R^+ \subseteq M \times M,$ queda definida como sigue:
Para cada $a, b \in M.$

$$a \ \ R^+ \ \ b \quad \text{syss} \quad \forall x \in a_M \, \exists y \in b_M \left[x \ \ R \ \ y \right] \quad \& \\ \forall y \in b_M \, \exists x \in a_M \left[x \ \ R \ \ y \right]$$

2. R es una *Bisimulación en* M syss $R \subseteq R^+.$

Ejemplos:

a). Sea M un sistema. Así, R es una bisimulación en $M,$ donde

1. $R = \emptyset.$ Aquí tenemos que, $\emptyset^+ = \left\{ \langle a, b \rangle \ / \ a \text{ y } b \text{ no tienen hijos} \right\}.$

2. $R = Id_M.$ Obsérvese que $a \ (Id_M^+) \ b$ syss $a_M = b_M$ y que $Id_M \subseteq Id_M^+.$

3. $p \ R \ b$ syss $p_M = q_M.$

4. $p \ R \ q$ syss $M_p \simeq M_q.$

b). En general, $R = M \times M$ **no** es una bisimulación. (¿Por qué?)

Proposición₆. Sea M es un sistema.

1. $(\quad)^+$ es monótona, e.d. Si $R \subseteq S \subseteq M \times M,$ entonces $R^+ \subseteq S^+.$

2. Si R es una bisimulación en $M,$ entonces R^+ también lo es.

Prueba: **1**. es inmediata de la definición de $(\quad)^+.$ Y **2**. se sigue de la misma definición y de **1**. †

Pasemos ahora a dar dos ejemplos de bisimulaciones, las cuales juegan un papel importante en todo esto.

Definición$_7$. Sean $a, b \in V$.

$$a \equiv b \text{ syss hay una pintura para } a \text{ y } b.$$

Proposición$_8$. $\equiv$ es una bisimulación en $V, \in$.
Prueba: Supongamos que $a \equiv b$. Así, hay una $g_p \in GPA$ y decoraciones d_1, d_2 tales que $d_1(p) = a$ y $d_2(p) = b$. Sea $x \in a_V$, así $x \in a = d_1(p) = \left\{ d_1(q) \ / \ q \leftarrow p \right\}$, por lo que hay un $q^* \in g_p$ tal que $d_1(q^*) = x$. Pongamos que $y = d_2(q^*) \in b = b_V$. Ahora, consideremos a la subgráfica g_{q^*}. Esta es pintura de x y de y al decorarla con las restricciones de d_1 y d_2 a g_{q^*}. En forma análoga, el otro caso. †

La importancia de ésta relacional se hace patente a partir de la siguiente,

Proposición$_9$. **AFA$_!$** syss $\forall a, b \left[a \equiv b \rightarrow a = b \right]$.
Prueba: La "ida" de este bicondicional, es un caso particular (para $GPA's$) de **AFA$_!$**. Veamos la otra parte usando la contrapositiva. Sea pues, $\langle g, \leftarrow \rangle$ una gráfica con decoraciones d_1 y d_2, tales que $d_1 \neq d_2$. Hay un nodo $p \in g$ y conjuntos a y b tales que $a = d_1(p) \neq d_2(p) = b$. Al considerar la subgráfica g_p y las decoraciones d_1 y d_2 restringidas a g_p, obtenemos lo que queríamos. †

El segundo ejemplo de bisimulaciones, nos lo dá la siguiente,

Proposición$_{10}$. En un sistema, la unión arbitraria de bisimulaciones pequeñas (conjuntos) es una bisimulación.
Prueba: Sean M un sistema y A una clase de bisimulaciones pequeñas en ella. Pongamos $R = \cup A$ y sean $a, b \in M$ tales que $a\,R\,b$. Por definición de R, hay una relación $r \in A$, bisimulación en M, tal que $a\,r\,b$. Ahora bién, por un lado, tenemos que $r \subseteq r^+$. Por otro lado, debido a que $r \subseteq R$, la monotonía de $(\quad)^+$ nos dá que, $r^+ \subseteq R^+$. Finalmente, aR^+b. †

El caso más importante de este resultado, lo capturamos en la siguiente,

Definición$_{11}$. Sea $M, \leftarrow$ un sistema arbitrario. La unión de todas las bisimulaciones pequeñas (conjuntos) de M, se denotará por $\equiv_M$. En símbolos:

$$\equiv_M \ = \bigcup \left\{ r \in V \ / \ r \text{ es bisimulación en } M \right\}$$

Esta relacional no solo contiene a las bisimulaciones pequeñas, sino también a las grandes (clases propias; exepto, por supuesto, cuando el sistema sea un conjunto, es decir una gráfica), más formalmente:

Proposición$_{12}$. Para cualquier sistema M, se tiene:

i). $\equiv_M$ es una bisimulación en $M,$ y

ii). Si R es una bisimulación en $M,$ entonces $R \subseteq \ \equiv_M$.

Prueba:

i). Esta es un caso particular de la proposición anterior.

ii). Sean, R una bisimulación en M y $a,b \in M$ y supongamos que $aRb.$ Consideremos la siguiente relación:

$$r = R \cap (M_a \times M_b)$$

r es un conjunto y no es difícil ver que es bisimulación en $M.$ Finalmente, $arb,$ por lo que $a \equiv_M b.$ †

Por las propiedades anteriores, $\equiv_M$ es la **única** bisimulación de $M,$ que contiene a **todas** las otras (las pequeñas y las grandes) y de aquí que se le dé el nombre de *La Bisimulación Máxima,* otros nombres son: *La Más Débil* o *La Más Grande.* Veamos un caso particular:

Proposición$_{13}$. La bisimulación máxima en $V,\ \in$ es, $\equiv.$ En símbolos:

$$\equiv_V \ = \ \equiv$$

Prueba: Sabemos que $\equiv$ es una bisimulación en $V,\in,$ falta ver que si R es una bisimulación (pequeña o grande, no importa) en $V,\in,$ entonces $R \subseteq \ \equiv.$ Construimos un sistema M de la siguiente manera: Los nodos son las parejas ordenadas de conjuntos que están R–relacionados, e.d. $M = R$ y las aristas, $\leftarrow$, quedan dada como sigue: Si $\langle u,v\rangle,\ \langle c,d\rangle \in M,$

$$\langle u,v\rangle \leftarrow \langle c,d\rangle \text{ syss } u \in c \ \& \ v \in d$$

(obsérvese que $\leftarrow$ es izquierda limitada: $\langle c,d\rangle_M \subseteq c \times d$). Ahora, considere las siguientes funcionales (las proyecciones):

$$D_1 : M \to V \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad D_2 : M \to V$$
$$\forall\langle p,q\rangle \in M \quad D_1(p,q) = p \qquad\qquad \forall\langle p,q\rangle \in M \quad D_2(p,q) = q$$

Veamos que D_1 y D_2 son decoraciones de M. Tenemos que probar que para $\langle c,d\rangle \in M,$

$$D_1(c,d) = \Big\{D_1(u,v) \ / \ \langle u,v\rangle \leftarrow \langle c,d\rangle\Big\}$$

sabemos que $D_1(c,d) = c,$ e.d. lo que hay que probar es:

$$c = \Big\{w \ / \ \exists\,\langle u,v\rangle \in M\Big[\langle u,v\rangle \leftarrow \langle c,d\rangle \ \& \ D_1(u,v) = w\Big]\Big\}$$

y esto lo haremos por doble contención: Supongamos que $u \in c,$ puesto que cRd y $R \subseteq R^+,$ hay un $v \in d,$ tal que uRv; con esto tenemos, $D_1(u,v) = u$ y $\langle u,v\rangle \leftarrow \langle c,d\rangle.$ El otro lado de la contención, es inmediata de la definición de D_1 y de $\leftarrow.$ En forma similar se prueba que D_2 es decoración de $M.$

Finalmente, sean $a,b \in V$ tales que $aRb,$ veamos que $a \equiv b.$ Consideremos la $GPA,$

$M_{\langle a,b\rangle}$ y sean D_1' y D_2' las restricciones de D_1 y D_2 a $M_{\langle a,b\rangle}$, respectivamente. Así, D_1' y D_2' son decoraciones de $M_{\langle a,b\rangle}$ con valores a y b, respectivamente y por tanto $a \equiv b$. †

Como es de esperarse, la bisimulación máxima es una relacional de equivalencia, la justificación de ello junto con un resultado previo, se dejan al lector:

Lema$_{14}$. Sea M un sistema.

1. $Id_M \leftrightharpoons \ =_M$ es bisimulación y

$$\forall a,b\left[a =_M^+ b \leftrightarrow a_M = b_M\right]$$

2. Si R es bisimulación sobre M, entonces R^{-1} también lo es y

$$(R^{-1})^+ = (R^+)^{-1}$$

3. Si R y S son bisimulaciónes sobre M, entonces $S \circ R$ también lo es y

$$S^+ \circ R^+ \subseteq (S \circ R)^+$$

Proposición$_{15}$. En todo sistema M, la $\equiv_M$ es una relacional de equivalencia. †

Más adelante veremos propiedades del cociente módulo una relacional de equivalencia, sobre todo cuando ésta es particularmente, una bisimulación.