Ejemplos de Funciones Normales

Naim Nuñez Morales.

15 de abril de 2015

Resumen

Recordemos que, en la tarea 1, mostramos que dado cualquier ordinal α, hay únicos $\beta_\alpha \in \{0\} \cup LIM$ y $n_\alpha \in \omega$ tales que

$$\alpha = \beta_\alpha +_{OR} n_\alpha$$

La funcional $F_0 : OR \longrightarrow OR$ definida como $F_0(\alpha) = n_\alpha$, tiene las siguientes características:

- No es monótona: $0 \in \omega$, pero $F_0(\omega) = 0 < 1 = F_0(1)$.
- No es continua. Si $\beta \in LIM$, entonces

  $$F_0(\beta) = 0 < \omega = \bigcup \{F_0(\nu) : \nu < \beta\}$$

  La última igualdad se tiene puesto que $\omega \subseteq \{F_0(\nu) : \nu < \beta\} \subseteq IMG(F_0) = \omega$, En realidad, lo que acabamos de ver es que no se cumple la propiedad $(*)$ de las notas de Rafa.
- Todo número natural es punto fijo de F_0.

Para la funcional $F_1 : OR \longrightarrow OR$, dada como $F_1(\alpha) = \omega$ se tiene que

- No es monótona.

- Es continua; si $\beta \in LIM$, entonces $\bigcup\{F_1(\nu) : \nu < \beta\} = \bigcup\{\omega\} = \omega = F_1(\beta)$. Cumple $(*)$ de las notas de Rafa.

- Tiene un punto fijo, ω.

Sea $F_2 = (\_)^+ \restriction_{OR}$. Se tiene que:

- F_2 es monótona.

- F_2 no es continua, pues $\bigcup\{n^+ : n \in \omega\} = \omega < \omega^+$.

- No tiene puntos fijos.

Definamos una funcional $F_3 : OR \longrightarrow OR$, como

$$F_3(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; n_\alpha \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } \; n_\alpha \text{ es par} \end{cases}$$

La funcional F_3 cumple lo siguiente:

- No es monótona; $F_3(0) = 1$, pero $F_3(1) = 0$.

- No tiene puntos fijos, como claramente se ve en el inciso anterior.

- Es continua, pues si β es un ordinal límite, entonces:

$$\bigcup\{F_3(\nu) : \nu < \beta\} = \bigcup\{0, 1\} = 1 = F_3(\beta).$$

La funcional $F_4 : OR \longrightarrow OR$ definida como

$$F_4(\alpha) = \begin{cases} \omega +_{OR} \alpha & \text{si } \; \alpha \in \omega \\ n_\alpha & \text{si } \; \omega = \alpha \vee \omega \in \alpha \end{cases}$$

tiene las siguientes características:

- No es monótona: $0 \in \omega$, pero $F_4(\omega) = 0 < \omega = F_4(0)$.

- No es continua.

$$F_4(\omega) = 0 < \omega +_{OR} \omega = \bigcup\{\omega +_{OR} n : n \in \omega\} = \bigcup\{F_4(n) : n < \omega\}$$

- No tiene puntos fijos.

La funcional $G : OR \longrightarrow OR$ dada por $G(\alpha) = \left|\alpha\right|$ no es monótona y todo cardinal es punto fijo. ¿Es continua? **NO** :

$$G(\omega_1) = \aleph_1 > \aleph_0 = \bigcup \omega^+ = \bigcup \left\{ \left|\nu\right| : \nu \in \omega_1 \right\}$$

Esto nos muestra que la condición de monotonía no es necesaria para que se verifique $(*)$.