El modelo de von Newmann y los axiomas de la Teoría de Conjuntos.

Naim Nuñez Morales.

10 de febrero de 2015

Resumen

Estas notas son un repaso de los axiomas de la Teoría de Conjuntos a partir de un an'lisis que muestra lo razonable que es tomarlos como punto de partida.

1. Introducción.

Idealmente, un sistema axiomático se construye de la siguiente forma:
Primero, elegimos los conceptos básicos y explicamos su naturaleza tanto como sea posible. Después, establecemos axiomas para tales conceptos. Si todo va bien, la explicación dada bastará para establecer el caracter verdadero de estos axiomas.

Nuestra intención es presentar la Teoría de Conjuntos de la manera antes descrita, es decir, dando una idea de la noción de conjunto. Esta puede parecer sorpresivamente complicada para el matemático que cree comprender muy bien que es un conjunto. Sin embargo, veremos que esta explicación es muy útil, no solo para justificar los axiomas de la Teoría de Conjuntos, sino que también para investigar nuevos axiomas y para demostrar teoremas acerca de conjuntos.

Las ideas aquí presesentadas han sido desarrolladas gradualmente durante el último siglo. Aunque todas ellas son bien conocidas por la mayoría de los teórico conjuntistas, raramente aparecen impresas de un modo coherente.

2. Conjuntos y su formación.

¿Cómo introducir la noción de conjunto? En una primera aproximación, conjunto es una colección de objetos. Así, un conjunto está formado por ciertos objetos, llamados los *miembros* o *elementos* del conjunto; tal conjunto queda completamente determinado por sus elementos.

Los objetos que son elementos de un conjunto puede ser, en principio, de cualquier tipo. En particular, nos gustaría considerar a un conjunto como un objeto y, de esta forma, permitirle ser elemento de algún conjunto. Todos aquellos objetos utilizados, de forma primaria, como elementos de algún conjunto son llamados *urielementos*.

Aún sin usar urielementos podemos formar muchos conjuntos. Podemos formar el conjunto vacío $\varnothing$; el conjunto $\{\varnothing\}$, cuyo único elemento es $\varnothing$; el conjunto cuyos únicos elementos son $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$;

y así sucesivamente. A este tipo de conjuntos es a los que dedicaremos nuestra atención. Después explicaremos porque no se pierde nada al hacer esto.

Aquí hay un punto s discutir; si un conjunto se forma “eligiendo” a sus elementos (conjuntos), ¿hay alguna restricción sobre los conjuntos que podemos elegir? Si, como las **paradojas** de la Teoría de Conjuntos muestran.

Vamos a recordar la Paradoja de Russell: Sea r el conjunto cuyos elementos son todos aquellos conjuntos x, tales que x no es un elemento de x. Entonces para todo conjunto x

$$x \in r \longleftrightarrow x \notin x \tag{1}$$

Sustituyendo (la variable) x por (el objeto) r se llega a una contradicción.

La explicación de esto no es tan difícil de entender. Cuando estamos formando un conjunto z por elección de sus elementos, aún no tenemos al objeto z, por lo que no podemos hacer uso de él como un elemento de z. El mismo razonamiento mestra que ciertos conjuntos no pueden ser elementos de z. Por ejemplo, supongamos que $z \in y$. Entonces no podemos formar el conjunto y hasta haber formado al conjunto z. Por tanto, y no está disponible como un objeto cuando formamos a z, en vista de lo cual no puede ser un elemento de z.

Tomando lo anterior desde una mejor perspectiva, un conjunto z sólo puede tener como elementos a aquellos conjuntos que fueron construidos *antes de*[1] z. Desde esta perspectiva, para el conjunto r formado anteriormente, 1 ocurre (o se aplica) sólo para los conjuntos x formados antes de r; así que no podemos sustituir (la variable) x por (el objeto) r.

Llevando el análisis anterior un poco mas lejos, llegamos a lo siguiente: Los conjuntos son formados *por etapas o estratos*. Para cada estrato S, hay ciertos estratos *antes de* S. En la etapa S, cada colección cuyos miembros son conjuntos formados en etapas anteriores a S es, de hecho, un conjuntos[2]. No hay otros conjuntos, mas que los conjuntos formados en los estratos.

Esto nos da una explicación razonablemente clara de la noción de *conjunto* en términos de las nociones *estrato* y *antes de*. ¿Que podemos decir acerca de estas nociones? Ciertamente, esperamos que *antes de* se comporte como una “relación” de orden (parcial estricto) sobre los estratos; y este es el único hecho sobre ellos que necesitamos para nuestros axiomas.

Los estratos nos son importantes ya que nos posibilitan formar conjuntos. Supongamos que x es una colección de conjuntos y $\mathscr{S}$ es una colección de estratos para la que cada elemento de x está formado en algún miembro de $\mathscr{S}$. Si hay una etapa después de todos los miembros de $\mathscr{S}$, entonces podemos formar a x en tal etapa. De esta manera, la cuestión fundamental para nosotros es:

> Dada una colección $\mathscr{S}$ de estratos, ¿hay alguna etapa después de todos los miembros de $\mathscr{S}$?

Nos gustaría responder afirmativamente a esta cuestión siempre que sea posible. Por las paradojas ya conocidas, sabemos que no toda colección de conjuntos es un conjunto, pero las hemos evitado al restringirnos s ólo a aquellos conjuntos formados en algún estrato. No nos gustaría restringir aún más nuestra noción de conjunto cómo para no tener suficientes etapas.

[1]*antes de* en un sentido lógico mas que temporal. Lo mismo que se entiende cuando decimos que un lema “A” debe ser probado antes que un teorema“B”

[2]Esto significa que si un conjunto fue formado en un estrato S, también puede ser formado en todos los estratos posteriores. Podríamos arreglar esto para que cada conjunto sea formado en exactamente un estrato, pero no hay razones de peso para ello.

Sin embargo, la respuesta a nuestra interrogante no siempre puede ser afirmativa. Por ejemplo, si $\mathscr{S}$ es la colección de todos los estratos, no hay un estrato después de todos los estratos en $\mathscr{S}$.

Una respuesta posible a nuestra pregunta fundamental es la siguiente; hay un estrato después de todos los estratos de $\mathscr{S}$, a condición de que podamos imaginar una situación en la cuál todos los estratos en $\mathscr{S}$ estén terminados, o dados completamente. En el caso en que $\mathscr{S}$ sea la colección de todos los estratos, no podemos imaginar tal situación, ya que siempre podemos imaginar una nueva etapa (no terminada, no presente con anterioridad). En el mejor de los casos, esta es una respuesta muy vaga, pues no es del todo claro, en general, que es lo que podemos o no imaginar. Sin embargo, nos proporciona una guía útil para obtener principios más precisos en los cuales podamos basar nuestros axiomas.

Específicamente, hat tres casos en los cuales nuestra vaga respuesta nos permite concluir que hay una etapa después de cualquier miembro de $\mathscr{S}$. El primero de ellos es cuando $\mathscr{S}$ consiste de una única etapa. El segundo es cuando $\mathscr{S}$ consiste de una sucesión infinita $S_0, S_1, \ldots$ de estratos. El tercero es cuando tenemos un conjunto x y un estrato S_y para cada y en x, y $\mathscr{S}$ consiste de cada una de las etapas S_z, con z en x.

En los primeros dos casos, es claro que podemos imaginar una situación en la que todas las etapas de $\mathscr{S}$ están dadas completamente. En el tercer caso, podemos argumentar lo siguiente: Supongamos que a medida que se completa cada estrato S, tomamos cada y en x que ya este formado en S y completamos la etapa S_y. Cuando alcancemos el estrato en el que x es formado, habremos formado a todos los y en x y, por consiguiente, habremos completado cada estrato S_y en $\mathscr{S}$.

En este momento hemos llegado lo suficientemente lejos en nuestro análisis como para obtener los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos. Aún hay muchos puntos oscuros para los que un mayor análisis llevaría a una mejor comprensión de los axiomas o a otros nuevos. Nos detendremos en algunos de ellos cuando sea pertinente.

Es posible que exista, por supuesto, un análisis completamente distinto de la noción de conjunto, y que este desemboque en un conjunto de axiomas muy distinto. Hasta ahora, ninguno de los análisis de la noción de conjunto difiere, en esencia, del que presentamos aquí y que desemboca en un sistema de axiomas satisfactorio.

3. Axiomas.

Antes de pasar a los axiomas, debemos describir el lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Este lenguaje tiene *variables conjunto* (o *variables objeto*), $s, y, z, \ldots$ que representan conjuntos arbitrarios. También tiene al símbolo $\in$ para la relación de pertenencia.

El resto de la notación es [puramente] lógica. Tenemos el símbolo $=$ para "*es igual a*". Tenemos los conectivos proposicionales: $\neg$ para "*no*", $\vee$ para "*o*", & para "*y*", $\longrightarrow$ para "*implica*" y $\longleftrightarrow$ para " *si y sólo si* ". Tenemos los cuantificadores: $\forall$ para "*para todo*" y $\exists$ para "*hay alguno*". Usualmente, por una cuestión de ahooro notacional, restringimos variables que siguen a un cuantificador a un conjunto; por ejemplo, $\forall x \in y\,(\varphi(x))$ es una abreviatura para $\forall x\,(x \in y \longrightarrow \varphi(x))$, mientras que $\exists x \in y\,(\varphi(x))$ abrevia a $\exists x\,(x \in y \;\&\; \varphi(x))$

Por supuesto, algunos símbolos lógicos pueden definirse en términos del resto de ellos, pero nuetro interés está en la Tería de Conjuntos, no en la Lógica. Es por este motivo que no nos detendremos en dar los axiomas de la Lógica de Primer Orden, ni siquiera en definir de manera precisa lo que es una fórmula de la Lógica de Primer Orden.

Recordemos como introducir (lógicamente) operaciones. Una operación unaria F se introduce "definiendo" $F(x)$ como el único y tal que $\varphi(x,y)$, donde $\varphi(x,y)$ es una fórmula del lenguaje donde no ocurre F[3]. Siendo mas precisos, primero probamos que $\forall x \exists! y \varphi(x,y)$ y luego introducimos el símbolo F en la expresión $F(x)$ para $\varphi(x,F(x))$. Las operaciones binarias y n-arias son tratadas de manera similar.

Observaciones. Permitimos que una operación dependa de parámetros. De esta forma permitimos cosas como $F(x) = x \cup y$, pero F también depende de y.

Ya podemos abordar los axiomas de nuestra teoría. El primer punto a dejar en claro es que un conjunto queda totalmente determinado por sus miembros. Este es el contenido de nuestro primer axioma.

Axioma de Extensionalidad.

$$\forall x, y \left[\forall z \big(z \in x \longleftrightarrow z \in y\big) \longleftrightarrow x = y\right] \tag{$\mathbf{ZF_1}$}$$

Uno de los puntos nodales establecidos en nuesto análisis es que ciertas colecciónes de conjuntos son conjuntos. Llevando esto a nuestro lenguaje, nos encontramos con una dificultad; no hay un método general para hablar acerca de colecciones antes de saber que son conjuntos. Aún así, hay ciertas colecciones de las que si podemos hablar. Dada una fórmula $\varphi(x)$, podemos expresar ciertas cosas acerca de la colección de *todos* los conjuntos que cumplen (que satisfacen) $\varphi(x)$[4]. En particular, podemos decir que tal colección *es* un conjunto como $\exists y \forall x \big(x \in y \longleftrightarrow \varphi(x)\big)$. Abreviaremos esta expresión como $\big\{x : \varphi(x)\big\} \in \mathbf{V}$.

Por ejemplo. uno de nuestros principios de existencia de conjuntos afirma que los miembros de una clase dada que además los son de un conjunto x forman un conjunto. Para ver esto, supongamos que x está formado en la etapa S. Luego, todo elemento de x fue formado antes de S, y de esta forma también lo fue cualquier elemento de la colección. Por lo tanto, la colección puede ser formada como conjunto en la etapa S. Expresamos este principio en el siguiente axioma.

Esquema Axiomático de Separación.

$$\forall x \big(\big\{y : y \in x \ \& \ \varphi(y)\big\} \in \mathbf{V}\big) \tag{$\mathbf{ZF_6}$}$$

Nótese que "*el*" axioma de separación no es un único axioma, sino un conjunto infinito de axiomas, uno por cada fórmula φ (el nombre proviene del hecho que estamos separando los elementos del conjunto x que satisfacen φ de aquellos que no).

Nuestro siguiente principio es: La unión de todos los elementos de un conjunto x es un conjunto. Supongamos que x está formado en la etapa S. Luego, todo elemento de x fue formado en alguna etapa anterior a S, y así, todo elemento de un miembro de x fue formado en alguna etapa anterior a S. Esto significa que todos los miembros de la unión fueron formado en etapas previas a S; por lo que la unión puede ser formada en S. El sigiente axioma expresa dicho principio.

[3] Como nuestro lenguaje no tiene letras mayúsculas, estas son un buen candidato para usar en estos casos.

[4] A tal colección le llamamos la *clase* determinada por φ.

Axioma de Unión.

$$\forall x\big[\{z : \exists y \in x(z \in y)\} \in \mathbf{V}\big] \qquad \textbf{(ZF}_\mathbf{4}\textbf{)}$$

El siguiente principio es: Si x es un conjunto, la colección de todos los *subconjuntos* de x es un conjunto. Supongamos que x está formado en la etapa S. Como todo elemento de x está formado con anterioridad a S, todo *subconjunto* de x está formado en S. Por lo que la colección de todos los *subconjuntos* de x puede formarse es cualquier etapa despues de S.

Para expresar tal prinicpio defnimos[5].

$$x \subseteq y \iff \forall z\left(z \in x \longrightarrow x \in y\right)$$

Axioma de las Partes o de Potencia.

$$\forall x\big[\{z : z \subseteq x\} \in \mathbf{V}\big] \qquad \textbf{(ZF}_\mathbf{5}\textbf{)}$$

Nuestro siguiente principio es: Si F es una operación unaria y x es un conjunto, entonces la colección de todos los $F(y)$, con $y \in x$, es un conjunto[6]. Para ver esto, sea S_y una etapa en la que $F(y)$ está formado. Entonces, hay una etapa S depués de todas las etapas S_y, con $y \in x$. En la etapa S podemos formar el conjunto deseado.

Esquema Axiomático de Sustitución o Reemplazo.

$$\forall x\big[\{z : \exists y \in x(z = F(y))\} \in \mathbf{V}\big] \qquad \textbf{(ZF}_\mathbf{8}\textbf{)}$$

Nuestro siguiente axioma asegura la existencia de un conjunto infinito. Es un poco más complicado, pues no tenemos una forma directa en el lenguaje para decir que un conjunto es infinito.

Axioma de Infinito.

$$\exists x\left[\exists y \in x \forall z\big(z \notin y\big)\ \&\ \forall y \in x \exists z \in x \forall w\Big(w \in z \longleftrightarrow \big(w \in y \vee w = y\big)\Big)\right] \qquad \textbf{(ZF}_\mathbf{7}\textbf{)}$$

Veamos una razón por la que este este axioma debe ser “verdadero”. Sea x_0 el conjunto vacío. Para cada n, sea x_{n+1} el conjunto cuyos elementos son exactamente x_n o bien los elementos de x_n. Podemos formar x_0 en casi cualquier etapa y una vez que x_n está formado en una etapa S, podemos formar x_{n+1} en cualquier etapa posterior a S. Supongamos que x_n está formado en la etapa S_n. Luego, hay una etapa S posterior a todas las S_n. En tal etapa podemos formar al conjunto x, cuyos elementos son $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Este conjunto x es aquel cuya existencia afirma el axioma anterior.

Queda como ejercicio ver que los axiomas restantes ocurren de forma natural en nuestra construcción por estratos. Todos los axiomas anteriores conforman la base axiomática generalmente aceptada de la Teoría de Conjuntos, así que cualquier idea de lo que es un conjunto debe apegarse a estos principios.

A la colección de axiomas ya mostrados, suele denotarse como $\mathbf{ZF}^-$.

Terminaremos hablando de un principio que ocurre en nuestra construcción, pero se ha visto que en otros *mundos* de conjuntos razonablemente construidos no ocurre. Esto es una razón fuerte para no considerarlo como un axiomas básico.

Un elemento y de x es un emphelemento minimal de x si no tienen elementos en común. Nuestro siguiente axioma establece que todo conjunto no vacío tiene un elemento minimal.

[5] Es el predicado (binario) de contención entre conjuntos x y y.

[6] La imagen directa de x bajo la operación F.

Axioma de Buena Fundación.

$$\forall x\Big[\exists y\big(y \in x\big) \longrightarrow \exists y \in x \forall z \in y\big(z \notin x\big)\Big] \tag{ABF}$$

A la colección de todos los axiomas anteriores se le conoce como **ZF**. Hasta aqui dejamos el repaso de axiomas. El axioma de elección tiene otras cuestiones que no abordaremos ahora, pero daremos por hecho que conocen las equvalencias.