En estas notas se obvian los conceptos de "**COPO**", "**COTO**", "**CODO**" y "**COBF**", que se encuentran en las notas sobre órdenes del semestre pasado[1]

Definiciones Básicas.

Definición 1. Sean A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional. Decimos que $\mathbf{R}$ *bien ordena a A* si y sólo si

1. $\mathbf{R}$ ordena parcialmente [en sentido estricto] a A,
2. Todo ***subconjunto*** no vacío de A tiene un elemento $\mathbf{R}$-mínimo, es decir;

$$\forall x\Big((x \neq \emptyset \ \&\ x \subseteq A) \longrightarrow \exists y\Big(y \in x \ \&\ \forall z \in x\big(y\mathbf{R}z \ \vee\ y = z\big)\Big)\Big).$$

$$\forall x\Big((x \neq \emptyset \ \&\ x \subseteq A) \longrightarrow \exists y\Big(y \in x \ \&\ \forall z \in x\big(y \neq z \longrightarrow y\mathbf{R}z\big)\Big)\Big).$$

Afirmación. Si $\mathbf{R}$ bien ordena a la clase A, entonces la ordena totalmente.

Definición 2. Decimos que $\langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un *COnjunto Bien Ordenado* si y sólo si

- $\langle a, \mathbf{r}\rangle \in$ **COPO**.
- $\mathbf{r}$ bien ordena a A.

Notación. **COBO** $= \{\langle a, \mathbf{r}\rangle : \langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un conjunto bien ordenado$\}$ y

$$\langle a, \mathbf{r}\rangle \in \mathbf{COBO} \Longleftrightarrow \langle a, \mathbf{r}\rangle \text{ es un conjunto bien ordenado.}$$

Afirmación. **COBO** $\subseteq$ **COTO**. Aún mas fuerte: **COBO** $=$ **COTO**$\cap$**COBF**.

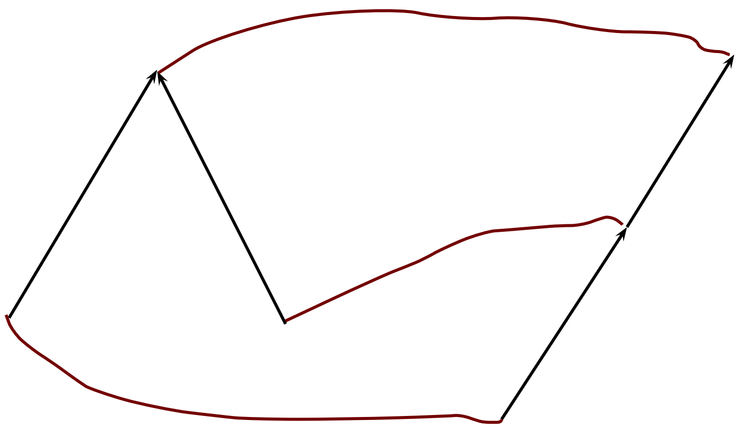
Ejemplos.

- $\langle n, \in_n\rangle \in$ **COBO**.
- $\langle \omega, \in_\omega\rangle \in$ **COBO**.

Homomorfismos

La idea de un morfismo de orden (y nos olvidaremos del homo) sirve para comparar dos órdenes, no solamente por la cantidad de elementos que tengan, sino por cómo se parecen los órdenes de cada uno de ellas. Veamos un ejemplo de una biyeccion entre conjuntos que no hace lo que nos imaginamos que queremos:

[1] Siga los siguientes links [1] y [2].



Ahora si, daremos la definición bonita.

Definición 3. Sean $\langle a,<\rangle,\langle b,<\rangle \in$ **COPO** y una función $f: a \to b$.

Decimos que f es un morfismo de a en b si y sólo si

$$\forall x,y \in a \left(x<y \longleftrightarrow f(x)<f(y)\right)$$

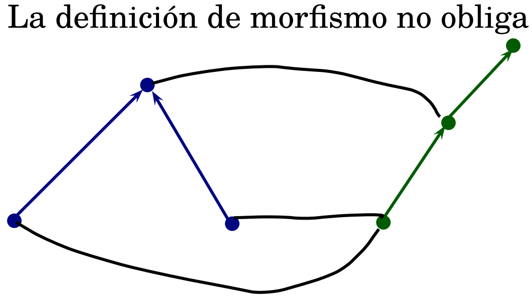
Si f es una inyectiva, diremos que f es un monomorfismo de a en b. Si f es una cwsuprayectican, diremos que f es un epimorfismo de a en b. Si f es una biyección, diremos que f es un isomorfismo de a en b.

Además, si f es un **isomorfismo** de a en a, diremos que f es un automorfismo de a..

Definición 4. Definimos $\cong\subseteq$ **COTO** $\times$ **COTO** de la siguiente forma.

$$\langle a,<\rangle \cong \langle b,<\rangle \iff \exists f\left(f \text{ es un isomorfismo de } a \text{ en } b\right)$$

La definición de morfismo no obliga a que f sea inyectiva ni sobre:



Así que la definición de isomorfismo si es interesante.

Por otro lado, cuando $\langle b,<\rangle,\langle a,<\rangle \in$ **COTO**, la definición de morfismo puede pedir menos (solo la ida), y el regreso es fácil:

Sean $x,y \in a$ tales que $f(x)<f(y)$, Por tricotomía en a, tenemos que $x=y$ o $y<x$ o $x<y$.
El primer caso no pasa porque f es función.
El segundo caso tampoco pasa porque mataría el que f es morfismo.

Así, queda demostrado lo que buscabamos.

Como, la mayoría de las veces (en este curso) trabajaremos con buenos órdenes o a lo mas con totales, la definición anterior puede debilitarse y pedir "solo la ida".

¿Qué morfismos conocemos ?

- La función de encaje (o inmersión) de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.
- La función de encaje de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.
- La inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
- Las inclusiónes entre conjuntos.... cuando hay una estructura de orden.

Observaciones. Si $\langle a,<\rangle \in$ **COTO**, Id_a es un automorfismo de a, pero no necesariamente es el único, por ejemplo, en $\mathbb{Q}$, cada número racional q define el siguiente isomorfismo;

$$\begin{aligned} t_q :\ \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto x+q \end{aligned}$$

Veamos que, en el caso de **COBO** las cosas se restringen mucho, de hecho, solo hay un automorfismo de a.

Observaciones. En cualquier buen orden $\langle a,<\rangle$, los $<$–segmentos iniciales tienen supremo, o bien, son ideales principales. Es decir, si $s\subset a$ es un segmento inicial, entonces s se puede ver como

$$\{x\in a : x<u\}$$

para alguna $u\in a$.

La prueba es exactamente la misma que cuando probamos que los buenos ordenes son completos.[2]

Lema 1. Sean $\langle a,<\rangle \in$ **COBO** y $f : a \longrightarrow a$ un automorfismo. Se tiene que

$$\forall x\in a\big(x\le f(x)\big).$$

Demostración. Procedamos por contradicción[3], suponiendo que

$$\{x\in a : f(x)<x\}\neq\emptyset$$

y sea m_0 el mínimo de tal conjunto. Luego, ya que f es morfismo, se tiene que $f(f(m_0))<f(m_0)$, lo que contradice la minimalidad de m_0. $\dashv$

A pesar de parecer un lema "bobo", el anterior nos lleva fácilmente a algunos resultados que, de otro modo, serían muy difíciles.

Corolario 2. Se tienen las siguientes proposiciones

a) Ningún buen orden es isomorfo a alguno de sus segmentos iniciales.

[2]**Es un ejercicio ver la prueba**. De hecho, esta prueba no requiere que a sea conjunto, y solo necesita que s sea un subconjunto acotado superiormente de a. La observación, ¿sigue siendo válida cuando hablamos de una relacional que bien ordene a una clase?

[3]También hay una prueba por inducción

b) Los buenos órdenes son rígidos. Es decir, en todo buen orden hay un solo automorfismo (la identidad).

c) Entre dos buenos órdenes hay a lo más un isomorfismo.

Demostración. Sean $\langle a, < \rangle, \langle b, < \rangle \in$ **COBO**.

a) Sea s un segmento inicial de a isomorfo a a. Usando la observación inicial, hay que aplicar f al monito que determina a s para contradecir al lema anterior.

b) Sea $f : a \to a$ un automorfismo y $x \in a$. Claramente f^{-1} también es automorfismo. De esto último sabemos que $y \leq f^{-1}(y)$ para toda $y \in a$, en particular para $y = f(x)$. Así las cosas;

$$f(x) = y \leq f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Es decir; $x \leq f(x)$ & $f(x) \leq x$, i.e. $f(x) = x$.

c) Sean $f, g : a \to b$ isomorfismos. No es difícil convencerse que $g^{-1} \circ f$ es un automorfismo en a. El inciso anterior obliga a que sea la identidad. Y, si hemos estudiamos bien, es directo el hecho de que $f = g$.

$\dashv$

Mencionamos una proposición que obtendremos mas adelante como un corolario del Teorema de Enumeración[4].

Proposición 1 (Comparación de Buenos Órdenes)**.** Sean $\langle a, < \rangle, \langle b, < \rangle \in$ **COBO**. Ocurre uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. $\langle a, < \rangle \cong \langle b, < \rangle$

2. $\langle a, < \rangle$ es isomorfo a un único segmento inicial de $\langle b, < \rangle$.

3. $\langle b, < \rangle$ es isomorfo a un único segmento inicial de $\langle a, < \rangle$.

Hacemos notar que las unicidades son consecuencia directa de todo lo expuesto, mientras que la existencia es la parte que dejamos para después.

CONCATENACIÓN DE DOS ORDENES

Hasta ahora solo conocemos los buenos órdenes finitos y ω. ¿Qué otros buenos ordenes distintos hay? Bajo **AE** veremos que (mas adelante haremos la prueba) que hay buenos órdenes no contables. Aún más, para cada número natural n, no hay buen orden de tamaño n escencialmente distinto que $\langle n, \in_n \rangle$ (**EJERCICIO**). Queda preguntarnos que pasa con los buenos órdenes infinitos (aunque a esta altura ya saben que ω^+ es esencialmente distinto que ω, aunque son del mismo tamaño).

Ahora veremos como construir nuevos órdenes a partir de dos dados.

[4]Una demostración de ello se puede encontrar en el libro de Fernando Hernández

Definición 5. Sean $\langle a, <_a \rangle, \langle b, <_b \rangle \in$ **COTO** tales que $a \cap b = \emptyset$. Definimos la relación $<_{a \circ b}$ en $a \cup b$ como:

$$x <_{a\circ b} y \iff \begin{cases} x <_a y \textbf{ si } x, y \in a \\ x <_b y \textbf{ si } x, y \in b \\ x \in a \ \& \ y \in b \end{cases}$$

También definimos *la concatenación de* $\langle a, <_a \rangle$ *seguido de* $\langle b, <_b \rangle$, denotado por $\langle a, <_a \rangle \circ \langle b, <_b \rangle$, como el par ordenado $\langle a \cup b, <_{a\circ b} \rangle$. Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos $a \circ b$ en vez de $\langle a, <_a \rangle \circ \langle b, <_b \rangle$

Lema 3. Sean $\langle a, <_a \rangle, \langle b, <_b \rangle \in$ **COTO** tales que $a \cap b = \emptyset$.

- $a \circ b \in$ **COTO**.
- Si $\langle a, <_a \rangle, \langle b, <_b \rangle \in$ **COBO**, $a \circ b \in$ **COBO**.

La hipótesis de que los conjuntos sean ajenos es vital, pues si tratamos de construir $1 \circ 1$, la relación $<_{1\circ 1}$ deja de ser irreflexiva. Esto no es gran problema, pues podemos ajenizar.

Observaciones. Recuerde que, si $\langle a, <_a \rangle$**COTO** y x un conjunto, los conjuntos a y $a \times \{x\}$ son naturalmente biyectables[5], se puede "copiar" el orden de a en $a \times \{x\}$, al que denotaremos como $<'_a$.

Definición 6. Sean $\langle a, <_a \rangle, \langle b, <_b \rangle \in$ **COTO** tales que $a \cap b \neq \emptyset$. Definimos la *concatenación de* $\langle a, <_a \rangle$ *seguido de* $\langle b, <_b \rangle$ $(a \circ b)$, como la concatenación de $\left\langle a \times \{0\}, <'_a \right\rangle$ seguido de $\left\langle b \times \{1\}, <'_b \right\rangle$, es decir, $\left\langle a \times \{0\}, <'_a \right\rangle \circ \left\langle b \times \{1\}, <'_b \right\rangle$.

Con la definición anterior, hemos terminado de definir la funcional $\_ \circ \_ :$ **COTO** $\times$ **COTO** $\longrightarrow$ **COTO**, que es cerrada en **COBO**, con la ventaja que todas las propiedades que queramos establecer basta demostarlas para el caso ajeno. Ahora veremos como se comporta respecto a $\cong$.

Lema 4. Sean $\langle a, <_a \rangle, \langle b, <_b \rangle, \langle c, <_c \rangle, \langle d, <_d \rangle \in$ **COTO**.
Si $\langle a, <_a \rangle \cong \langle b, <_b \rangle$ y $\langle c, <_c \rangle \cong \langle d, <_d \rangle$, entonces $a \circ c \cong b \circ d$.

Demostración. Basta unir testigos de isomofía para obtener el isomorfismo deseado. ⊣

[5] la biyección natural asigna cada $z \in a$ al par $\langle z, x \rangle$