Tarea III

Naim Nuñez Morales.

18 de mayo de 2015

Ejercicio 1. Sea κ un cardinal infinito. Responda

- ¿Cuántas permutaciones tiene κ?
- ¿Cuántas funciones reales de variable real continuas hay?

Ejercicio 2. Sea $F : OR \longrightarrow OR$ una funcional normal. Demuestre que para cualquier ordinal α, se tiene que

$$cof(F(\alpha)) = cof(\alpha)$$

Ejercicio 3. Justifique cuidadosamente la demostración que se ofrece de la siguiente proposición:

Proposición. $\forall\kappa\,\forall\lambda\left[\omega \leq \kappa \ \&\ cof(\kappa) \leq \lambda \longrightarrow \kappa < \kappa^{\lambda}\right]$

Demostración. Sea $\kappa \geq \omega$ y $\lambda \geq cof(\kappa)$. Sabemos que $\kappa \leq \kappa^{\lambda}$, veamos que no hay funciones suprayectivas de κ en κ^{λ}.
Sea $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ testigo de cofinalidad y sea $g : \kappa \longrightarrow {}^{\lambda}\kappa$.

Definamos $g : \lambda \longrightarrow \kappa$, como
$\forall \xi < \kappa,\ h(\xi) = \bigcap\left[\kappa \setminus \left\{(g(\nu))(\xi) : \nu < f(\xi)\right\}\right]$.

Así, h no está en la imagen de g, por lo que g no es suprayectiva.

Ejercicio 4. Todo cardinal fuerte es un beth.

Ejercicio 5. Sea κ un cardinal y sea $\langle \lambda_\gamma : \gamma < \kappa \rangle$ una sucesión de cardinales (de longitud κ) monótona no decreciente y que no se estaciona, es decir;

$$\forall \gamma < \kappa \ \exists \xi \Big(\gamma < \xi < \kappa \ \& \ \lambda_\gamma < \lambda_\xi \Big)$$

Demuestre que $cof(\kappa) = cof\left(\sup_{\gamma<\kappa} \lambda_\gamma\right)$.

Ejercicio 6. Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. Si $|a| < \kappa$, entonces $\left| \wp(a) \right| < \kappa$.

2. Si $|x| < \kappa$, y para toda $i \in x$ se tiene que $|a_i| < \kappa$, entonces $\left| \bigcup_{i\in x} a_i \right| < \kappa$

3. Si $|a| < \kappa$ y $f : a \longrightarrow \kappa$, entonces $\left| \bigcup f[a] \right| < \kappa$.

Ejercicio 7. Demuestre una de las siguientes afirmaciones en **ZF**[1].

- Sea a un conjunto con al menos 5 elementos. Muestre que a^2 no tiene subconjuntos biyectables con $\wp(a)$.
- Sea x un conjunto tal que
  - (a) No hay b tal que $x \prec b \prec \wp(x)$ (i.e. $\wp(x)$ es UN sucesor inmediato de x).
  - (b) No hay c tal que $\wp(x) \prec c \prec \wp\big(\wp(x)\big)$ (i.e. $\wp\big(\wp(x)\big)$ es UN sucesor inmediato de $\wp(x)$).

  Demuestre que $\wp(x)$ es bien ordenable.

[1] Es decir, **evite** usar cualquier teorema cuya demostración dependa del Axioma de Elección.