Tarea I.

Teoría de Conjuntos II.

Resumen

Aqui va la tarea. Faltan 3 ejercicios. Al rato los subo.

Ejercicio 1. Demuestre con todo detalle la proposición 14 de las notas 1.02_OR_B.

Ejercicio 2. Demuestre (con todo rigor, justificando todos los pasos) la proposición 17 de las notas 1.02_OR_B.

Ejercicio 3. Formalice adecuadamente y demuestre la siguiente afirmación:

> Todos los buenos órdenes finitos del mismo tamaño son isomorfos.

¿Es cierto lo anterior para buenos órdenes infinitos?

Ejercicio 4. Pruebe rigurosamente los siguientes enunciados.

- $\forall \alpha, \beta \left(\alpha \circ \beta \cong \alpha +_{OR} \beta \right)$.
- $\forall \alpha, \beta \left(\alpha \bullet \beta \cong \alpha \cdot_{OR} \beta \right)$[1].
- $\forall \alpha, \beta \Big(\exp(\alpha, \beta) \in \mathbf{COBO} \Big)$[2]

Ejercicio 5. Demuestre.
Para todo ordinal α, hay únicos $\beta \in LIM \cup \{0\}$ y $n \in \omega$ tales que $\alpha = \beta + n$.

NOTACIÓN: $\beta = \ell(\alpha)$, $n = n(\alpha)$. ¿Cómo se comporta la parte límite y la parte natural con respecto a la suma y al producto ordinal?

[1]A la izquierda nos referimos al producto antilexicográfico y el de la derecha es la operación definida de forma recursiva

[2]Recuerde que en clase ya vimos que es un orden total.

En el siguiente ejercicio veremos la versión transfinita del algoritmo de Euclides. Para ello, hay que definir que quiere decir "α divide a β":

$$\alpha \big| \beta \Longleftrightarrow \exists\gamma\big(\beta = \alpha \cdot \gamma\big)$$

Ejercicio 6. Demuestre que para todos los ordinales no nulos α y β, hay un ordinal γ con las siguientes características:

- $\gamma \big| \alpha$ y $\gamma \big| \beta$.
- $\forall\delta\left(\delta \big| \alpha \ \& \ \delta \big| \beta \longrightarrow \delta < \gamma\right)$

¿Es posible cambiar el consecuente del segundo inciso por $\delta \big| \gamma$?[3]

Sea α un ordinal. Definimos por recursión la funcional $\alpha^{-} : OR \longrightarrow \mathbf{V}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} & \alpha^0 = 1 \\ \forall\beta & \alpha^{\beta^+} = \left(\alpha^\beta\right)^+ \\ \forall\gamma \in LIM & \alpha^\gamma = \bigcup\left\{\alpha^\beta : \beta \in \gamma\right\} \end{array}$$

Ejercicio 7. Sean α, β ordinales. Demuestre que

- $\alpha^\beta \in OR$.
- $\alpha^\beta \cong \exp(\alpha, \beta)$.

Ejercicio 8. Sea a un conjunto numerable y $\langle a, < \rangle \in \mathbf{COTO}$.

- Demuestre que hay $b \subsetneq a$ tal que $\langle a, < \rangle \cong \langle b, <\restriction_b \rangle$.
- Pruebe que hay $b \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $\langle a, < \rangle \cong \left\langle b, <_{\mathbb{Q}}\restriction_b \right\rangle$.

Ejercicio 9. Sea $\langle a, < \rangle \in \mathbf{COTO}$. Suponga que

- $a \sim \omega$, y
- para todo $f : a \longrightarrow a$, $\forall x \in a\big(x \leq f(x)\big)$,

Demuestre que $<$ bien ordena a a.

[3] Puntos extra al que lo haga con tipos de orden...

Ejercicio 10. Sea R una relacional bien fundada, izquierda limitada y extensional sobre $A = CMP(R)$, Demuestre que hay un unico isomorfismo de A en A. Demuestre las siguientes consecuencias del Colapso de Mostowski.

- Si $A \subseteq BF$ y $\in_A$ es extensional sobre A, entonces A es isomorfa a una única clase transitiva.
- Si $A \subseteq BF$, $\in_A$ es extensional sobre A y $a \in A$, entonces $\rho(\pi(a)) \leq \rho(a)$.
- Si $\in_A$ es extensional sobre A y $B \subseteq A$ es una clase transitiva, entonces $\pi\restriction_B = Id_B$.

Ejercicio 11. Demuestre.

- $a \in BF \longleftrightarrow a \subseteq BF$.
- Si $a \in BF$, entonces $\rho(a) = \sup\{\rho(x)^+ : x \in a\}$.

Ejercicio 12. En clase definimos el rango basados en la construcción de BF por estratos. Busque otra forma de definir el rango y a partir de ella construir los estratos.