Tarea II.

Teoría de Conjuntos II.

Ejercicio 1. Sea a un conjunto. Demuestre que la clase B_a es impropia.

$$B_a = \left\{\beta : \exists u, v\big(u \subseteq a \ \& \ v \subseteq u \times u \ \& \ \langle u, v \rangle \in \mathbf{COBO} \ \& \ \langle u, v \rangle \cong \left\langle \beta, \in_\beta \right\rangle)\right\}$$

Ejercicio 2. Sea $\gamma \in OR$ y sea $\lhd_\gamma$ el orden canónico sobre $\gamma \times \gamma$. Demuestre:

1.- $\left\langle \gamma, \lhd_\gamma \right\rangle \in \mathbf{COBO}$.

2.- Si $\alpha, \beta < \delta < \gamma$, entonces $\left\langle \alpha, \beta \right\rangle_{\lhd_\gamma} \subseteq \delta \times \delta$.

Ejercicio 3. En clase probamos que, si $F : OR \longrightarrow OR$ es normal, entonces

$$\forall \alpha \exists \beta \big(\alpha \leq \beta \ \& \ F\left(\beta\right) = \beta\big) \qquad \text{(Prop. 2)}$$

Revise la prueba y muestre que el β obtenido es óptimo, es deccir:

$$\beta = \bigcap \left\{\gamma : \alpha \leq \gamma \ \& \ F\left(\gamma\right) = \gamma\right\}$$

Ejercicio 4. Sea $F : OR \longrightarrow OR$ normal y $\emptyset \neq a \subseteq OR$.Demuestre que

$$F\left(\bigcup a\right) = \bigcup \left\{F\left(\nu\right) : \nu \in a\right\}$$

Recuerde que del ejercicio anterior, se desprende que la imagen de cualquier ordinal límite, bajo funcionales normales, es límite.

Ejercicio 5. Demuestre el ejercicio 3 a partir del ejercicio 4.

Ejercicio 6. Este ejercicio es quizás uno de los más interesantes, hay que demostrar que el producto se distribuye sobre la suma:

Sean γ, δ ordinales no nulos y sea $\{\kappa_{\alpha,\beta} : \alpha < \gamma \;\&\; \beta < \delta\}$ una familia de cardinales indizada por $\gamma \cdot \delta$. Demuestre que

$$\prod_{\alpha<\gamma} \sum_{\beta<\delta} \kappa_{\alpha,\beta} = \sum_{f:\gamma\to\delta} \prod_{\alpha<\gamma} \kappa_{\alpha,f(\alpha)}$$

Ejercicio 7. Sea $\langle P, < \rangle \in$ **COTO** y $\kappa \in CAR$. Si todos los segmentos iniciales tienen cardinalidad menor a κ, entonces $|P| \leq \kappa$.

Si $\{\kappa_i : i < \lambda\} \subseteq CAR$, vamos a hacer una convención para los siguientes ejercicios; que λ sea infinito y los sumandos no sean cero, o que algún sumando sea infinito.

Ejercicio 8. Demuestre que

$$\prod_{i\in\mu} \left(\kappa^{\lambda_i}\right) = \kappa^{\left(\sum_{i\in\mu} \lambda_i\right)}$$

Ejercicio 9. Sea $\lambda \in LIM$ y $\langle \kappa_i : i \in \lambda \rangle$ una sucesión monótona de cardinales. Suponga además que $\kappa_0 \neq 0$. Demuestre que

$$\sum_{i\in\lambda} \kappa_i < \prod_{i\in\lambda} \kappa_i$$