ORDINALES

Definición$_1$. x es un *(Número) Ordinal* syss

i) x es transitivo y

ii) $\langle x, \in_x \rangle \in COBO$ (estricto)

Ejemplos:

1. $\forall n \in \omega \big(n$ es un ordinal$\big)$.
2. ω es un ordinal.
3. $x \in \omega$ syss x es un ordinal y
   todo subconjunto no-vacío de x tiene un elemento $\in$–máximo

Notación:

1) $OR = \{ x \ / \ x$ es un ordinal$\}$
2) Usaremos letras griegas minúsculas para denotar ordinales:
   $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (exepto: ε, ω, φ, y ρ)
3) Si φ es una fórmula conjuntista, entonces:

$$\forall \alpha \; \varphi(\alpha) \leftrightharpoons \forall x \, [x \in OR \rightarrow \varphi(x)]$$

$$\exists \alpha \; \varphi(\alpha) \leftrightharpoons \exists x \, [x \in OR \; \& \; \varphi(x)]$$

Proposición$_1$. OR es una clase inductiva, e.d.

1) $0 \in OR$
2) $\forall \alpha \, [\alpha^+ \in OR]$

Prueba: Es similar a la que se dió para naturales (directa). †

Así, $0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega^+, (\omega^+)^+, \ldots$ son ordinales.

Proposición$_2$. Todo subconjunto transitivo de un ordinal, es un ordinal:

$$\forall x \forall \alpha \left[x \subseteq \alpha \; \& \; x \text{ es transitivo } \rightarrow x \in OR \right]$$

Prueba: Sean a y α tales que $a \subseteq \alpha$ y a es transitivo. Solo faltaría ver que $\langle a, \in_a \rangle \in COBO$, pero esto es inmediato del hecho de que $\in_a \; = \; \in_\alpha \upharpoonright a$. †

Ejemplo 4. $\forall \alpha, \beta \, [\alpha \cap \beta \in OR]$.

Proposición$_3$. OR es una clase transitiva (Todo elemento de un ordinal es un ordinal).

$$\forall x,y \left[x \in y \ \& \ y \in OR \ \rightarrow \ x \in OR \right]$$

Prueba: Supongamos que $x \in \alpha$, veamos que $x \in OR$. Como α es transitivo, $x \subseteq \alpha$; por la proposición anterior nos basta probar que x es transitivo: Sean pues, y y z tales que $z \in y$ y $y \in x$; por la transitividad de α, tenemos que todos, x, y y z son elementos de α y ya que $\in$ es transitiva en α, tenemos que $z \in x$. †

Veamos ahora el orden que hay entre ordinales. Tenemos que la relacional de pertenencia, $\in$, para los ordinales es irreflexiva, asimétrica y transitiva, e.d. la $\in$ ordena parcialmente a OR. Antes de ver que lo ordena totalmente, veamos la relación que hay con la contención –al igual que con los números naturales– Lo que sabemos hasta ahora es,

$$\alpha \in \beta \rightarrow \alpha \subsetneq \beta,$$
$$(\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \rightarrow \alpha \subseteq \beta$$

Proposición$_4$. **1**) $\forall \alpha, \beta \, [\alpha \subsetneq \beta \rightarrow \alpha \in \beta]$

2) $\forall \alpha, \beta \, [\alpha \subseteq \beta \rightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)]$

Prueba: **2**) es inmediata de **1**), veamos pues esto último. Sean α, β tales que $\alpha \subsetneq \beta$. Así, $\emptyset \neq \beta \setminus \alpha \subseteq \beta$ y como β está bien ordenado por $\in$, tenemos que $\beta \setminus \alpha$ tiene un $\in$–mínimo, digamos γ :

i) $\gamma \in \beta \setminus \alpha$

ii) $\forall x \left[x \in \beta \setminus \alpha \ \rightarrow \ (\gamma \in x) \vee (\gamma = x) \right]$

Af. $\gamma = \alpha$. Y esto lo haremos por doble contención:

$\subseteq \ ]$ Sea $x \in \gamma$. Por **i**) y de que β es transitivo, tenemos que $x \in \beta$. Ahora bien, si $x \notin \alpha$, tendríamos, por **ii**), que $\gamma \in x \vee \gamma = x$, pero esto contradiría el hecho de que $\in$ es asimétrica e irreflexiva en β, por tanto $x \in \alpha$.

$\supseteq \ ]$ Sea $x \in \alpha$. Como $\alpha \subsetneq \beta$, $x \in \beta$. Tenemos pues, que $x, \gamma \in \beta$ y por la tricotomía de $\in$ en β, tenemos que

$$(x \in \gamma) \vee (\gamma = x) \vee (\gamma \in x)$$

pero es imposible que $(\gamma = x)$ o que $(\gamma \in x)$, pues en tales casos, puesto que $x \in \alpha$ y α es transitivo, tendríamos que $\gamma \in \alpha$, lo que contradiría **i**). Por todo esto, $x \in \gamma$.
Finalmente, por **1**), $\alpha = \gamma \in \beta$. †

Concretamos la discusión anterior y éste resultado en el siguiente,

Corolario$_5$. **1)** $\alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$
2) $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)$

Pasemos ahora a ver el orden lineal, para ello:

Proposición$_6$. Dos ordinales son comparables, respecto a la contención.

$$\forall \alpha, \beta \left[(\alpha \subseteq \beta) \ \vee \ (\beta \subseteq \alpha) \right]$$

Prueba: Suponer lo contrario nos lleva a un absurdo. Pues si α y β son ordinales que no cumplen la propiedad tendríamos que

$$\left.\begin{array}{lcl} \alpha \not\subseteq \beta \ \Rightarrow \ \alpha \cap \beta \subsetneq \alpha & \Rightarrow & \alpha \cap \beta \in \alpha \\ \text{y} & \text{(*) y 5.1} & \\ \beta \not\subseteq \alpha \ \Rightarrow \ \alpha \cap \beta \subsetneq \beta & \Rightarrow & \alpha \cap \beta \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta \ \ \underset{\circ}{\nabla} \ !!$$

(*) $\alpha \cap \beta \in OR$, **Ejemplo 4**). †

Corolario$_7$. OR está totalmente ordenado por $\in$.

Pasemos ahora a ver la buena ordenación de los ordinales; para ello probaremos algo más general.

Proposición$_8$. *(Principio de Minimalidad para OR).*
Toda clase no–vacía de ordinales tiene un elemento minimal respecto a la $\in$.
Formalmente,
Sea φ una fórmula conjuntista. Así,

$$\exists \alpha \ \varphi(\alpha) \rightarrow \exists \beta \left[\varphi(\beta) \ \& \ \forall \gamma \ (\gamma \in \beta \rightarrow \neg\varphi(\gamma)) \right]$$

Prueba: Sea $\alpha \in OR$ tal que $\varphi(\alpha)$.
Si es el caso que $\forall \gamma(\gamma \in \alpha \rightarrow \neg\varphi(\alpha))$, no hay nada que probar; α es el buscado.
Supongamos pues, que $\exists \gamma(\gamma \in \alpha \ \& \ \varphi(\alpha))$. Sea

$$b = \{\gamma \in \alpha \ / \ \varphi(\gamma)\}$$

($b \in V$: por el esquema axiomático de comprensión (**ZF$_6$**).)

Tenemos que $\emptyset \neq b \subseteq \alpha$. Puesto que $\in_\alpha$ bien ordena a α, b tiene un elemento $\in$–mínimo, digamos β. Así tenemos:

i) $\beta \in b$

ii) $\forall \gamma \left[\gamma \in \beta \rightarrow \gamma \notin b \right]$

o equivalentemente:

i') $\beta \in \alpha$ y $\varphi(\beta)$

ii') $\forall\gamma\left[\gamma \in \beta \rightarrow (\gamma \notin \alpha) \vee \neg\varphi(\gamma)\right]$

Ahora bien, observemos que debido a que $\beta \in \alpha$ y a que α es transitivo, si $\gamma \in \beta$, entonces $\gamma \in \alpha$. Y de aqui que **ii'**) se convierte en

$$\forall\gamma\left[\gamma \in \beta \rightarrow \neg\varphi(\gamma)\right]$$

aunado esto con **i'**), tenemos que β es el ordinal buscado. †

Corolario$_9$. OR está bien ordenado (en forma estricta) por $\in$.

Notación: El *orden* entre ordinales lo denotaremos por: $<$ o $\leq$ y queda dado como sigue:

$$\alpha < \beta \ \leftrightharpoons\ \alpha \in \beta \ \leftrightharpoons\ \alpha \subsetneq \beta$$
$$\alpha \leq \beta \ \leftrightharpoons\ \alpha \subseteq \beta \ \leftrightharpoons\ (\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta)$$

Dos resultados inmediatos son los siguientes.

Corolario$_{10}$. Todo conjunto transitivo de ordinales, es un ordinal.

Corolario$_{11}$. *(Paradoja de Burali-Forti).*

$$OR \notin V$$

Prueba: Pues en caso contrario, OR sería un conjunto transitivo (**Proposición$_3$**) de ordinales y por tanto un ordinal, concluimos que $OR \in OR$ $\underset{\circ}{\nabla}$ **!!** †

Como es de esperarse –en los buenos órdenes– es cierto un principio de inducción.

Proposición$_{12}$. *Principio de Inducción para OR (Primera Forma)*:
Sea ψ una fórmula conjuntista, así

$$\forall\alpha\left[\forall\beta\Big(\beta < \alpha \rightarrow \psi(\beta)\Big) \rightarrow \psi(\alpha)\right] \rightarrow \forall\alpha\, \psi(\alpha)$$

Prueba: Tomar la contrapositiva del Principio de Minimalidad, con $\varphi \leftrightharpoons \neg\Psi$ †